

**UNTERSUCHUNGEN DER
STABILITÄT VON
MAGNETOHYDRODYNAMISCHEN
GLEICHGEWICHTEN MIT HELIKALER
SYMMETRIE**

Dario Correa Restrepo

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553803_0077

DISSERTATIONS- UND FOTODRUCK FRANK oHG
8 München 2, Gabelsbergerstraße 15, Tel. 2 8 0 9 0 9 0

UNTERSUCHUNGEN DER STABILITÄT
VON MAGNETOHYDRODYNAMISCHEN GLEICHGEWICHTEN MIT HELIKALER
SYMMETRIE

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Darío Correa Restrepo

München 1973

Tag der Einreichung: 9.10.1973



Erster Referent : Priv. Doz. Dr. D. Lortz

Zweiter Referent : Prof. Dr. H. Bross

Tag der mündlichen Prüfung: 19.12.1973

Herrn Priv. Doz. Dr. D. Lortz möchte ich für seine Anleitung bei der Anfertigung dieser Arbeit herzlich danken. Außerdem möchte ich Herrn Dr. J. Nührenberg für seine Unterstützung und Beratung meinen Dank aussprechen, ebenso Herrn Dr. H. Wimmel für seine wertvollen Anregungen. Schließlich gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. H. Bross für seine nützlichen Hinweise.

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit werden im Rahmen der idealen Magnetohydrodynamik Gleichgewicht und Stabilität für ein Plasma mit helikaler Symmetrie untersucht.

Für eine bestimmte Wahl der für das Gleichgewicht frei vorgebbaren Funktionen werden exakte helikalsymmetrische Lösungen der Gleichgewichtsgleichung gefunden. Außerdem wird die allgemeine helikalsymmetrische Lösung in der Nähe der magnetischen Achse konstruiert.

Für den Fall, daß die magnetische Achse eine Schraubenlinie ist, auf der die elektrische Stromdichte verschwindet, werden helikalsymmetrische Gleichgewichte konstruiert, für die ein hinreichendes Stabilitätskriterium in der Nähe der magnetischen Achse erfüllt ist. Dabei wird die Stabilität durch eine geeignete Wahl der Querschnittsform des Plasmas erreicht: in zweiter Ordnung (im Abstand von der magnetischen Achse) müssen elliptische Querschnitte angenommen werden; liegt die große Halbachse der Ellipsen senkrecht bzw. parallel zum Hauptkrümmungsvektor der magnetischen Achse, so muß in dritter Ordnung ein nierenförmiger Querschnitt gewählt werden derart, daß seine (von außen gesehen) konkave Seite der Symmetrieachse zu- bzw. abgewandt ist; liegt die große Halbachse der Querschnitte weder senkrecht noch parallel zum Hauptkrümmungsvektor der magnetischen Achse, so müssen ebenfalls nierenförmige Querschnitte gewählt werden, jedoch

in allgemeiner (von den Gleichgewichtsparametern abhängiger Lage.

Als Nebenergebnis erhält man, daß diejenigen helikalen Gleichgewichte, die durch kleine Abweichungen vom Theta-Pinch beschrieben werden können, instabil sind.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
I. EINLEITUNG	1
II. EXAKTE LÖSUNGEN DER GLEICHGEWICHTSGLEICHUNG	8
III. DIE ALLGEMEINE HELIKALSYMMETRISCHE LÖSUNG DER GLEICHGEWICHTSGLEICHUNG IN DER NÄHE DER MAG- NETISCHEN ACHSE	26
IV. UNTERSUCHUNG DER STABILITÄT	35
ANHANG I	49
ANHANG II	56
ANHANG III	66
ANHANG IV	73
VERZEICHNIS DER VERWENDETEN GRÖSSEN	76
LITERATURVERZEICHNIS	83
LEBENS LAUF	85

I. EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit werden Gleichgewichte der idealen Magnetohydrodynamik untersucht. Dabei wird das Plasma als elektrisch neutrales Gas unendlicher Leitfähigkeit betrachtet und sein Verhalten durch die üblichen hydrodynamischen Größen, nämlich die Dichte ν , die Geschwindigkeit $\vec{V}$ und den als Skalar angenommenen Druck p beschrieben¹⁾. Unter diesen Voraussetzungen gilt folgendes Gleichungssystem^{2) 3)}:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \nabla \cdot (\nu \vec{V}) = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}), \quad \text{I.1}$$

$$\nu \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} \quad (\text{Bewegungsgleichung}), \quad \text{I.2}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla,$$

-
- 1) Für die Ableitung der Magnetohydrodynamik (MHD) aus einer mikroskopischen Theorie vgl. z. B. [1], insbesondere Kapitel 9; [2], [3].
 - 2) Das MKSA-Einheitensystem wird hier verwendet.
 - 3) Dabei bedeuten: $\vec{B}$ die magnetische Induktionsflußdichte, $\vec{j}$ die elektrische Stromdichte, μ_0 die Permeabilität des Vakuums, $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke und $\vec{\gamma}$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Quellenfreiheit des Magnetfeldes}) , \quad \text{I.3}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \quad (\text{differentielle Form des Ampèreschen Gesetzes}), \text{I.4}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (\text{Induktionsgesetz}) . \quad \text{I.5}$$

Berücksichtigt man das Ohmsche Gesetz in der Form, die für bewegte Leiter unendlicher Leitfähigkeit gilt, nämlich $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$, so erhält man

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) . \quad \text{I.6}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{v \vec{r}} \right) = 0 \quad (\text{Energiegleichung}) . \quad \text{I.7}$$

Im statischen Gleichgewicht verschwinden $\vec{v}$ und die Ableitungen nach der Zeit. Aus dem obigen Gleichungssystem erhält man dann die magnetohydrostatischen Gleichungen

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} , \quad \text{I.8}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \quad , \quad \text{I.9}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{I.10}$$

Für die Beschreibung toroidaler Apparaturen zur Plasmaeinschließung interessieren nur solche Lösungen von I.8-10, für die die Flächen $p = \text{const.}$ entweder eine Torus-Gestalt haben oder sich als Zylinder bis ins Unendliche erstrecken¹⁾ (einen solchen Zylinder kann man als Torus mit unendlichem großen Radius auffassen; also sind die Flächen $p = \text{const.}$ dreifach zusammenhängend). Die Flächen $p = \text{const.}$ heißen Druckflächen oder Isobaren. Bei den hier interessierenden Lösungen von I.8-10 verlaufen die magnetischen Feldlinien und die Stromlinien auf ineinandergeschachtelten Druckflächen, die deshalb auch magnetische Flächen heißen. Die innerste, in eine Kurve entartete magnetische Fläche heißt magnetische Achse.

1) Eine Reihe von Eigenschaften, die das statische Gleichgewicht eines durch I.8-10 beschriebenen Plasmas besitzt, wird in [5] diskutiert.

Der Einfachheit halber werden im folgenden ausschließlich lineare Anordnungen untersucht, also solche, die in einer Richtung, z.B. der z -Richtung, bis ins Unendliche reichen. Die Toroidizität wird lediglich berücksichtigt, indem man verlangt, daß alle physikalischen Größen periodisch in z sind. Solche Untersuchungen können dann als Vorstudie für toroidale Gleichgewichte betrachtet werden.

Eine weitere Vereinfachung des Problems erzielt man, wenn eine Symmetrie vorausgesetzt wird, so daß aus dem dreidimensionalen Problem ein zwei- oder gar eindimensionales entsteht.- In Hinblick auf die Bedeutung helikaler Felder für die Stellarator-Konfigurationen ¹⁾ wird in dieser Arbeit helikale Symmetrie vorausgesetzt, d.h. , daß die skalaren physikalischen Größen ausschließlich von den Koordinaten s und $u = \varphi + kz$ abhängen, also konstant sind auf den Schraubenlinien $s = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ (s, φ, z seien dabei die üblichen Zylinderkoordinaten, $2\pi/k$ die Periode in z -Richtung) .

Unter diesen Bedingungen ist es zweckmäßig, ein divergenzfreies Vektorfeld $\vec{W}$ einzuführen durch

1) Vgl. [6] .

$$\vec{w} := sq \nabla s \times \nabla u, \quad q := (1 + k^2 s^2)^{-1}. \quad \text{I.11}$$

Die Vektoren $\vec{w}$ sind in jedem Punkt tangential zu den Schraubenlinien. Die Größe q ist mit dem Verhältnis T/R von Torsions- zu Krümmungsradius der Schraubenlinien durch die Beziehung $q = (1 + T^2/R^2)^{-1}$ verknüpft. Mit Hilfe von $\vec{w}$ und zwei eindeutigen Funktionen $f(s,u)$, $F(s,u)$ läßt sich das divergenzfreie, helikalsymmetrische Magnetfeld in der Form

$$\vec{B} = f(s,u) \vec{w} + \vec{w} \times \nabla F(s,u) \quad \text{I.12}$$

schreiben¹⁾.

Setzt man I.12 in

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad \text{I.13}$$

1) Vgl. Anhang I.

F ist zunächst nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt; diese kann, wie es hier der Fall ist, o.B. d.A. so gewählt werden, daß für die magnetische Achse $F=0$ gilt. Stellen A_z bzw. B_z die kovariante z -Komponente (in einem helikalen Koordinatensystem) des magnetischen Vektorpotentials bzw. der Induktionsflußdichte dar, so gelten die Beziehungen: $F = -A_z + \text{const.}$, $f = B_z$. Im magnetohydrostatischen Gleichgewicht haben die Funktionen f und F noch eine weitere Bedeutung (vgl. Fußnote 2), S.6).

ein und berücksichtigt, daß p und f im Gleichgewicht nur von F abhängen können¹⁾, so erhält man die Dgl.

$$\mathcal{L} F = 2kqf - ff' - \frac{\mu_0}{q} p', \quad ' := \frac{d}{dF}. \quad \text{I.14}$$

Dabei sind $f(F)$ und $p(F)$ frei wählbare Funktionen und

$$\mathcal{L} := \frac{1}{q_s} \frac{\partial}{\partial s} q_s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{q_s^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2}. \quad \text{I.15}$$

Im folgenden wird F bzw. f Fluß- bzw. Stromfunktion genannt²⁾.

Für das Gleichgewichtsfeld der Stromdichte gilt¹⁾:

$$\vec{j} = - \left(\frac{p'}{q} + \frac{ff'}{\mu_0} \right) \vec{w} - \frac{f'}{\mu_0} \vec{w} \times \nabla F. \quad \text{I.16}$$

1) Vgl. Anhang I.

2) Im magnetohydrostatischen Gleichgewicht stellt F den magnetischen Fluß pro z -Einheit durch eine bandförmige helikale Fläche dar, deren einer Rand in der magnetischen Achse, deren anderer in einer beliebigen Schraubenlinie der Plasmaoberfläche liegt. Entsprechendes gilt für $(f_0 - f)/\mu_0$, bezogen auf den elektrischen Strom. Dabei ist f_0 der Wert, den f auf der magnetischen Achse annimmt (vgl. Anhang III).

In dieser Arbeit werden zunächst eindeutige Lösungen der Dgl. I.14 gesucht, die, zumindest in einer endlichen Umgebung der magnetischen Achse, monoton sind. (Dann sind die Querschnitte senkrecht zur z-Achse der Flächen $F = \text{const.}$ - entsprechend $p = \text{const.}$ - geschlossene Kurven; nur solche Lösungen sind für die Anwendungen von Interesse.) In Kapitel II gelingt es, durch eine einfache Vorgabe der freien Funktionen $f(F)$ und $p(F)$ (so, daß die Dgl. I.14 linear bleibt) eine breite Klasse exakter Lösungen zu finden.

In Kapitel III wird die allgemeine helikalsymmetrische Lösung in der Nähe der magnetischen Achse konstruiert. Danach wird in Kapitel IV mit Hilfe notwendiger¹⁾ und hinreichender²⁾ Kriterien die Stabilität helikalsymmetrischer Gleichgewichtskonfigurationen in der Nähe der magnetischen Achse für den (für die Anwendungen interessierenden) Fall untersucht, daß die elektrische Stromdichte auf der magnetischen Achse verschwindet.

Abschließend werden in den Fällen, in denen bereits Ergebnisse vorliegen, diese mit den hier gefundenen verglichen.

1) Vgl. [7] .

2) Vgl. [8] .

II. EINE KLASSE VON EXAKTEN LÖSUNGEN DES HELIKALSYMMETRISCHEN IDEALEN MHD GLEICHGICHTSPROBLEMS

In diesem Kapitel wird das helikalsymmetrische MHD-Gleichgewichtsproblem für den Fall behandelt, daß die Gleichung I.14 linear ist, denn dann ist eine Lösung durch Trennung der Veränderlichen möglich. Man sucht nach Lösungen $F(s,u)$, mit denen es möglich ist, eine helikale Plasmasäule mit nach außen abfallendem Druck zu beschreiben. Hat der Druck p ein Maximum auf der magnetischen Achse (die etwa durch $s = s_0$, $u = 0$ gegeben sei), dann muß auch die Flußfunktion F an der Stelle $s = s_0$, $u = 0$ ein Extremum haben, das hier o.B.d.A. als ein Minimum angenommen wird. Um das erwünschte Druckprofil beschreiben zu können, muß also die Flußfunktion mit wachsendem Abstand von der magnetischen Achse monoton wachsen. Im allgemeinen ist es möglich, diese Bedingung mit den hier gefundenen Lösungen in einer endlichen Umgebung der magnetischen Achse zu erfüllen. Die magnetische Fläche, die diese Umgebung von den Gebieten zunehmenden Druckes (entsprechend abfallender Flußfunktion) trennt, wird Separatrix genannt. Als Plasmarand ($p = 0$) muß man also eine magnetische Fläche innerhalb der Separatrix oder diese selbst wählen.

Um die Dgl. I.14 lösen zu können, müssen die Profilkfunktionen $p(F)$ und $f(F)$ vorgegeben werden. Hat man eine Lösung $F(s,u)$ mit den oben beschriebenen Eigenschaften gefunden, dann kann das Magnetfeld mit Hilfe der Gleichung I.12 überall im Plasma bestimmt werden, und es ist möglich, am Plasmarand ein Vakuumfeld anzuschließen¹⁾. (Dies ist für die Anwendungen von Bedeutung, denn man möchte den Kontakt des Plasmas mit dem Einschließungsgefäß verhindern, um Energieverluste und Verunreinigungen des Plasmas sowie eine Beschädigung der Gefäßwand zu vermeiden.) Man kann sich also die Plasmasäule als schlauchartiges Gebilde in einem von einer Metallwand umgebenen Vakuum vorstellen. Die magnetische Achse ist entweder eine Gerade (z-Achse) oder hat die Form einer Schraubenlinie (s. Abb.II.1).

Die hier gefundenen Lösungen stellen eine breite Klasse helikalsymmetrischer Gleichgewichtskonfigurationen dar, die als Sonderfälle die Lösungen für helikalsymmetrische Vakuumfelder und die in [10] angegebenen Lösungen enthalten.

1) Vgl.z.B. 11, [27].

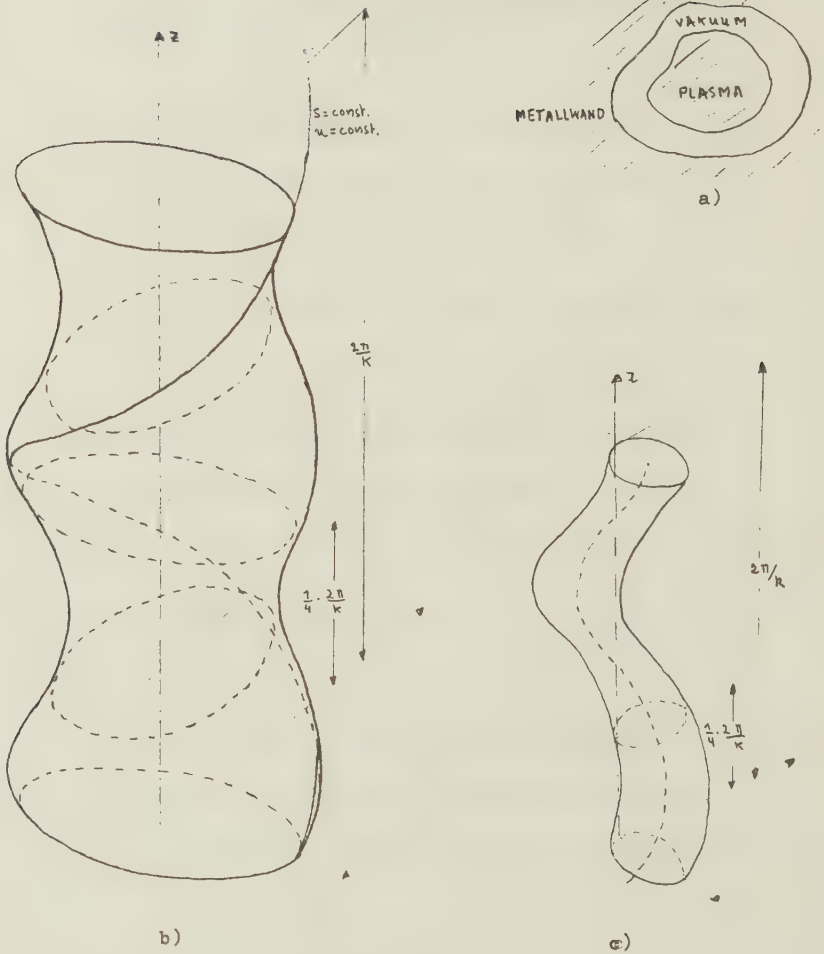


Abb. II.1

- a) Querschnitt der Plasmasäule.
- b) Plasmasäule mit gerader magnetischer Achse.
- c) Plasmasäule mit Schraubenlinie als magnetischer Achse.

Soll die Gleichgewichtsgleichung I.14 linear in F sein, dann muß für die Abhängigkeit des Plasmadruckes p und der Stromfunktion f von der Flußfunktion F offenbar gelten:

$$p = p_0 + p_1 F + p_2 F^2, \quad \text{II.1}$$

$$f = f_0 + f_1 F. \quad \text{II.2}$$

Für die Berechnungen ist es zweckmäßig, folgende dimensionslose Größen einzuführen:

$$g := ks \quad \text{II.3}$$

(Es wird ausschließlich der Fall echter helikaler Symmetrie untersucht, also $k \neq 0$.)

g stellt das Verhältnis T/R von Torsions- zu Krümmungsradius der Schraubenlinien dar¹⁾),

$$\bar{\Phi} := \frac{k}{f_0} F = \frac{k \sqrt{q_0}}{B_0} F \quad \text{II.4}$$

(mit $q_0 := (1 + k^2 s_0^2)^{-1}$, wobei s_0 der Radius des Zylinders ist, auf dem die magnetische Achse verläuft und B_0 der Betrag des Magnetfeldes auf der magnetischen Achse.)

$\bar{\Phi}$ ist der magnetische Fluß pro z -Einheit durch²⁾ eine helikale Fläche, in Einheiten von $B_0 / k \sqrt{q_0}$,

1) Vgl. Anhang I.

2) Vgl. Fußnote 2), Seite 6.

$$\alpha := \frac{\mu_0 p_1}{k f_0 q_0} = \frac{\mu_0 p_1}{k \sqrt{q_0} B_0} ,$$

II.5

$$\eta := \frac{2 \mu_0 p_2}{k^2}$$

(α bzw. η sind die erste Ableitung des Plasmadruckes nach der Flußfunktion auf der magnetischen Achse bzw. die zweite Ableitung von p nach F , in Einheiten von $k \sqrt{q_0} B_0 / \mu_0$ bzw. $k^2 / 2 \mu_0$),

$$\gamma := f' / k$$

II.6

(γ ist die Ableitung der Stromfunktion nach der Flußfunktion, in Einheiten von k).

In dieser Arbeit werden die durch II.3-6 definierten Größen verwendet.

α, η, γ sind frei wählbare Parameter, die den Verlauf der Profilfunktionen p und f charakterisieren.

α und γ sind mit dem Betrag j_0 der Stromdichte auf der magnetischen Achse durch die Beziehung

$$j_0 = \frac{k B_0}{\mu_0} (\alpha + \gamma)$$

verknüpft.

Setzt man in II.1 zunächst $p_2 = 0$, so liefert I.14 unter Berücksichtigung von II.2-6 für die Funktion $\bar{\Phi}$ die Differentialgleichung

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{(1-\xi^2)}{(1+\xi^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1+\xi^2}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right\} \bar{\Phi} + \gamma \left\{ \gamma - \frac{2}{1+\xi^2} \right\} \bar{\Phi} =$$

II.7

$$= -\gamma + \frac{2}{1+\xi^2} - \alpha q_0 (1+\xi^2).$$

Mit dem Ansatz

$$\bar{\Phi}(\xi, u) = h(\xi) \cdot \mathcal{U}(u) + g(\xi)$$

II.8

erhält man

$$\frac{1}{\mathcal{U}} \cdot \frac{d^2 \mathcal{U}}{du^2} = \text{const.} = -n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Die Lösungen müssen in } u \text{ periodisch sein mit Periode } 2\pi^1).$$

Die zu einem n gehörende Lösung für $h(\xi)$ werde mit h_n bezeichnet. Dann gilt :

$$\xi^2 (1+\xi^2) h_n'' + \xi (1-\xi^2) h_n' + [-n^2 + (\xi^2 - 2n^2 - 2\gamma)\xi^2 + (\gamma^2 - n^2)\xi^4] h_n = 0$$

II.9

Die beiden linear unabhängigen Lösungen von II.9 werden mit $h_n^{(1)}$ und $h_n^{(2)}$ bezeichnet.

1) Vgl. Anhang I.

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \varrho^2(1+\varrho^2)g'' + \varrho(1-\varrho^2)g' + \gamma\varrho^2[(\gamma-2) + \gamma\varrho^2]g = \\ = (2-\gamma-\alpha q_0)\varrho^2 - (\gamma+2\alpha q_0)\varrho^4 - \alpha q_0\varrho^6. \end{aligned} \quad \text{II.10}$$

Die allgemeine, in u periodische Lösung von II.7 ist dann

$$\Phi(\varrho, u) = g(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n h_n^{(1)}(\varrho) + D_n h_n^{(2)}(\varrho)] \cdot [A_n \cos nu + B_n \sin nu] \quad \text{II.11}$$

(mit den Integrationskonstanten A_n, B_n, C_n, D_n).

Falls $\gamma^2 \neq n^2$ ist, können $h_n^{(1)}, h_n^{(2)}$ durch Besselsche Funktionen (wenn $\gamma^2 < n^2$, durch modifizierte Besselsche Funktionen) ausgedrückt werden:

$$h_n^{(1)} = \frac{2^n \cdot n! \cdot (\gamma^2 - n^2)^{-\frac{n}{2}}}{n - \gamma} \cdot \varrho^{1+\gamma} \frac{d}{d\varrho} \left[\varrho^{-\gamma} J_n(\sqrt{\gamma^2 - n^2} \varrho) \right], \quad \text{II.12}$$

$$h_n^{(2)} = \frac{\pi}{2^n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{(\gamma^2 - n^2)^{\frac{n}{2}}}{n + \gamma} \cdot \varrho^{1+\gamma} \frac{d}{d\varrho} \left[\varrho^{-\gamma} N_n(\sqrt{\gamma^2 - n^2} \varrho) \right]. \quad \text{II.13}$$

Die Normierungsfaktoren wurden so gewählt, daß sich beim

Grenzübergang $\gamma^2 \rightarrow n^2$ möglichst einfache Lösungen ergeben:

$$\lim_{\gamma \rightarrow n} h_n^{(1)} = \varrho^n \left(1 + \frac{n}{1+n} \varrho^2 \right) ,$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow n} h_n^{(11)} = \varrho^n , \quad \text{II.14}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow n} h_n^{(12)} = \varrho^{-n} ,$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow -n} h_n^{(21)} = \varrho^{-n} \left(1 - \frac{n}{1-n} \varrho^2 \right) , \quad n \neq 1 .$$

Für $n=1$ und $\gamma = -1$ erhält man aus II.9

$$h_1^{(21)} = \frac{1}{\varrho} - 2\varrho \ln \varrho \quad \text{II.15}$$

(der Grenzübergang in II.13 ist in diesem Fall nicht durchführbar).

Im Vakuum verschwindet der Plasmadruck, und es fließt kein Strom, d.h. $p' = f' = 0$ bzw. $\alpha = \gamma = 0$ (vgl. I.16, II.1, 2, 5, 6). Setzt man in II.12,13 $\gamma = 0$ und in II.10 $\alpha = \gamma = 0$, dann ergeben sich die bekannten Lösungen für helikalsymmetrische Vakuumfelder¹⁾.

Der Fall $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ bedeutet, daß der Plasmastrom überall in Richtung der Schraubenlinien fließt²⁾. In diesem Fall erhält man aus II.10, 13, 14 die in [10] angegebenen Lösungen. Für andere Orientierungen der Stromrichtung ist $\gamma \neq 0$. Als Lösung von II.10 ergibt sich dann

$$g(\varphi) = -\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha g_0}{\gamma^3} \{2 + \gamma\} - \frac{\alpha g_0}{\gamma^2} g^2 +$$

II.16

$$+ C_0 \{I_0(\gamma \varphi) + \varphi I_1(\gamma \varphi)\} + D_0 \{N_0(\gamma \varphi) + \varphi N_1(\gamma \varphi)\}.$$

1) Vgl. etwa [11].

2) Vgl. Anhang I, AI.14 und AI.28; vgl. außerdem [10].

Jetzt soll die Gleichgewichtsgleichung I.14 mit den Annahmen II.1, 2 gelöst werden, wobei aber $p_2 \neq 0$ ist. Unter Berücksichtigung von II.3-6 erhält man aus I.14 für die Funktion Φ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial g^2} + \frac{1 \cdot (1-g^2)}{g \cdot (1+g^2)} \frac{\partial}{\partial g} + \frac{1+g^2}{g^2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \right) \Phi + \\ & + \left[\gamma^2 - \frac{2\gamma}{1+g^2} + \eta(1+g^2) \right] \Phi = \\ & = \frac{2}{1+g^2} - \gamma - \alpha q_0 (1+g^2) . \end{aligned} \quad \text{II.17}$$

Es ergibt sich als Lösung von II.17 wieder II.11; dabei sind jetzt aber $h_n^{(1)}$, $h_n^{(2)}$ die beiden linear unabhängigen Lösungen der von II.9 verschiedenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & g^2(1+g^2) h_n'' + g(1-g^2) h_n' + \\ & + [-n^2 + (\gamma^2 - 2\gamma - 2n^2 + \eta)g^2 + (\gamma^2 n^2 + 2\eta)g^4 + \eta g^6] h_n = 0 , \end{aligned} \quad \text{II.18}$$

sowie g_0 eine Lösung der von II.10 verschiedenen

inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned} & g^2(1+g^2)g'' + g(1-g^2)g' + g^2[(\gamma^2-2\gamma+\eta) + (\gamma^2+2\eta)g^2 + \eta g^4]g = \\ & = (2-\gamma-\alpha q_0)g^2 - (\gamma+2\alpha q_0)g^4 - \alpha q_0 g^6. \end{aligned} \quad \text{II.19}$$

Ist $\gamma = n \pm \sqrt{\eta}$, so erhält man:

$$h_n^{(n)} = g^n e^{\frac{(n-\gamma)}{2}g^2} \left[1 + \frac{\gamma}{(\gamma-n)g^2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)! (\gamma-n)^j} g^{2j} \right], n \neq 0, \quad \text{II.20}$$

$$h_0^{(n)} = e^{-\frac{\gamma}{2}g^2} - 2\gamma e^{\frac{\gamma}{2}g^2} \int \frac{e^{-rg^2}}{g} dg, \quad \text{II.21}$$

$$h_n^{(n)} = g^{-n} e^{\frac{(\gamma-n)}{2}g^2}. \quad \text{II.22}$$

Für $\gamma \neq n \pm \sqrt{\eta}$ ist

$$h_n^{(i)} = g^n e^{\frac{(n-\gamma)}{2}g^2} \frac{d}{dg^2} \left[e^{-(n \pm \sqrt{\eta} - \gamma)\frac{g^2}{2}} Y_n^{(i)}(\sqrt{\eta}g^2) \right] \quad (i=1,2), \quad \text{II.23}$$

wobei $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}$ die beiden linear unabhängigen Lösungen der Kummerschen (konfluenten hypergeometrischen) Differentialgleichung sind ¹⁾ :

$$x Y_{xx} + (n-x) Y_x + \frac{1}{4\sqrt{-\eta}} \left[\eta^2 - (n+\sqrt{-\eta})^2 \right] Y = 0, \quad \text{II.24}$$

$$x := \sqrt{-\eta} \, \vartheta^2.$$

Wenn man verlangt, daß der Plasmadruck nach außen hin abfällt, dann muß (für $\alpha < 0$) die Funktion $\bar{\Phi}$ ein Minimum auf der magnetischen Achse (die durch $\bar{\Phi} = 0$ bzw.

$\vartheta = \vartheta_0$, $u = 0$ gegeben sei) haben. Durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten ist es möglich, diese und außerdem folgende zusätzliche Bedingungen zu erfüllen:

- a) Die Stromdichte verschwindet auf der magnetischen Achse, d.h. : $\alpha + \gamma = 0$.

1) S.z.B. [12], [26] .

(In diesem Fall können die in [8] hergeleiteten Kriterien angewandt werden.)

b) Das Stabilitätskriterium IV.8, das hinreichend für Stabilität in der Nähe der magnetischen Achse ist, wird erfüllt.

Die hier gefundenen Lösungen können (verbunden mit dem hinreichenden Stabilitätskriterium IV.8) für die Planung von Experimenten von Nutzen sein. Wie am Anfang dieses Kapitels erwähnt, kann immer ein Vakuumfeld (zumindest in einer Umgebung der Plasmaoberfläche) am Plasmarand angeschlossen werden. Wenn die dem Plasma zugewandte Fläche der Metallwand, die zur Einschließung des Plasmas dient, mit einer magnetischen Fläche des Vakuumfeldes übereinstimmt¹⁾ und das Gleichgewicht stabil ist (dies ist der Fall, wenn z.B. das Stabilitätskriterium IV.8 erfüllt ist), dann darf man erwarten, daß das Plasma in der Tat besonders gute Stabilitätseigenschaften hat²⁾.

1) Man kann also die Form des Einschließungsgefäßes aus den hier gefundenen Lösungen bestimmen.

2) Selbstverständlich besitzen die hier erhaltenen Ergebnisse nur einen heuristischen Charakter, denn erstens wurden sie aus einer idealisierten Theorie abgeleitet, und zweitens gelten sie streng nur für eine unendlich lange Plasmasäule.

Die Abbildungen II.2-5 stellen die Querschnitte der magnetischen Flächen mit der $z = 0$ - Ebene für einfache Beispiele spezieller Lösungen II.11 (mit $p_2=0$) dar.

Die Abbildung II.5 entspricht einer Lösung, die das Kriterium IV.8 erfüllt. Man hat sich die zu den Abbildungen entsprechende Plasmasäule so vorzustellen, daß beim Fortschreiten in der z -Richtung sich die Querschnitte um die z -Achse mit der konstanten "Geschwindigkeit" $d\varphi/dz = -k$ drehen.

Bei Vorgabe von φ_0 wurden die weiteren Parameter möglichst einfach gewählt, jedoch so, daß die Fälle $\gamma > 0$, $\gamma = 0$ und $\gamma < 0$ illustriert werden und die Lösungen $\Phi(\varphi, u)$ an der Stelle $\varphi = \varphi_0$, $u = 0$ ein Minimum haben.

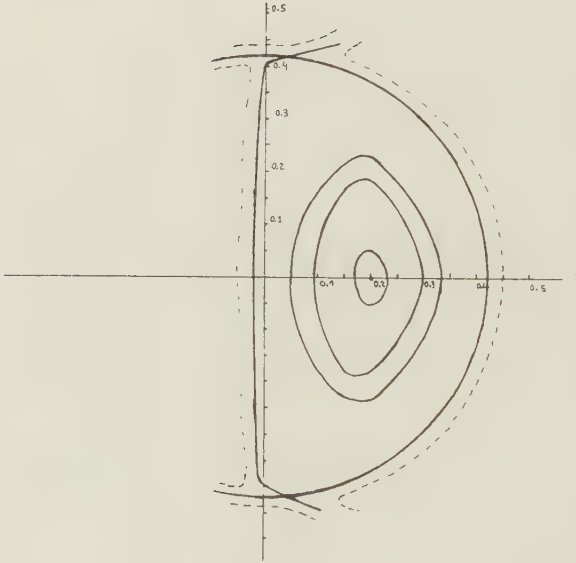


Abb. II.2

Querschnitte der Flächen $\Phi = \text{const.}$ mit der $z = 0$ - Ebene
 für die Lösung II.11 mit $\gamma^2 = 101$, $n=1$, $\varphi_0 = 0.2$, $C_0 = D_0 =$
 $= D_1 = B_1 = 0$, $A_1 = 1$, $C_1 = 0.822\alpha$, $\Phi_{\text{Separatrix}} = -0.163\alpha$.

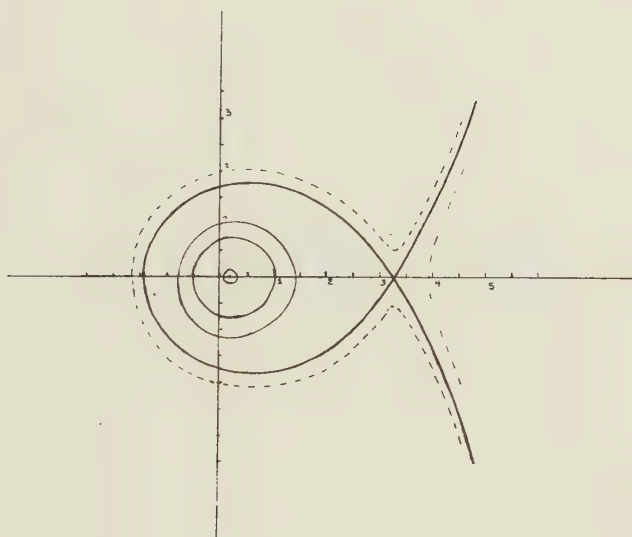


Abb. II.3

$\gamma = 1$, $C_1 = 0.313 p_1$, $\bar{\Phi}_{\text{sep.}} = -2.77\alpha$, sonst wie Abb. II.2

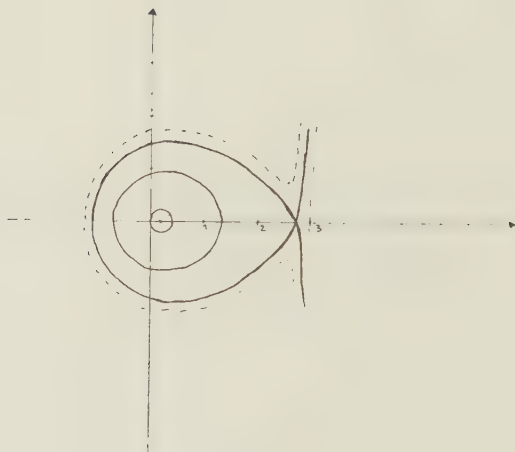


Abb. II.4

$\gamma = 0.866$, $c_1 = 0.478\alpha$, $\bar{\Phi}_{\text{Sep.}} = -2.59\alpha$, sonst
wie Abb. II.2.

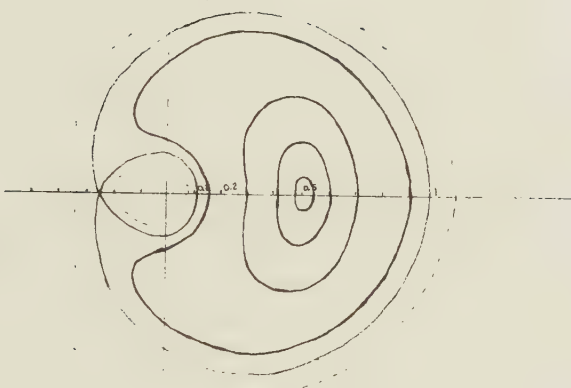


Abb.II.5

$n = 1$, $\gamma = -\alpha = 1$, $\varphi_0 = 0.5$, $C_0 = -1.59$,

$D_0 = -0.158$, $C_1 = -0.175$, $D_1 = B_1 = 0$,

$A_1 = 1$, $\Phi_{\text{Sep.}} = 0.133$.

Es ist dann ¹⁾ : $\Omega = 0$, $\epsilon = 1.5$ ²⁾, $\lambda_3 = 0.521$.

Dieses Gleichgewicht erfüllt das Stabilitätskriterium IV.8.

1) Vgl. Kapitel III und Anhang II.

2) Die angegebene Elliptizität bezieht sich auf die Querschnitte der magnetischen Flächen mit einer senkrecht zur magnetischen Achse stehenden Ebene.

III. DIE ALLGEMEINE HELIKALSYMMETRISCHE LÖSUNG IN DER NÄHE DER MAGNETISCHEN ACHSE

Bis auf Spezialfälle (vgl. II.1,2) ist man für die Lösung des Gleichgewichtsproblems auf Näherungsverfahren angewiesen. Darüber hinaus ist die Berechnung der Gleichgewichtsgrößen, die für die Anwendung von Stabilitätskriterien notwendig sind, in den meisten Fällen praktisch nur durchführbar, wenn die Untersuchung der Stabilität auf die Umgebung der magnetischen Achse beschränkt wird. Außerdem ist die Nähe der magnetischen Achse besonders interessant, denn oft sind gerade die achsennahen Gebiete des Plasmas am schwierigsten zu stabilisieren (vgl. z.B. [16]). In diesem Kapitel soll nun die Gleichgewichtsgleichung I.14 durch eine - in Anhang II präzisierte - Entwicklung in der Nähe der magnetischen Achse gelöst werden. In dem in Anhang II eingeführten Koordinatensystem wird ein Raumpunkt P bestimmt durch die krummlinige Koordinate l längs der magnetischen Achse und die Polarkoordinaten $\sigma^{1)}$ und θ , die auf der durch P gehenden Normalebene zur magnetischen Achse definiert sind. Wie in Anhang II gezeigt wird, hängen die helikalsymmetrischen skalaren Größen ausschließlich von σ und θ ab. Die helikalsymmetrische Gleichgewichtsgleichung I.14 läßt sich dann in der Form

1) σ und l sind hier dimensionslos und geben die Längen in Einheiten von $1/k$ wider.

$$\frac{D(\sigma, \theta)}{q(\sigma, \theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{q}{D} g^{\sigma\sigma} F_{\sigma} \right\} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{q}{D} g^{\theta\theta} F_{\theta} \right\} \right] =$$

III.1

$$= 2kqf - f \frac{df}{dF} - \frac{\mu_0}{q} \frac{dp}{dF}.$$

schreiben ($D(\sigma, \theta)$, $q(\sigma, \theta)$, $g^{\sigma\sigma}(\sigma, \theta)$ und $g^{\theta\theta}(\sigma, \theta)$) sind in Anhang II erklärt).

Nimmt man an, daß in der Umgebung der magnetischen Achse, beschrieben durch $\sigma \ll 1$, sich der Plasmadruck p und die Magnetfeldkomponente f nach Potenzen von F in der folgenden Form entwickeln lassen:

$$p = p_0 + p_1 F + o(F^2), \quad \text{III.2}$$

$$f = f_0 + f_1 F + o(F^2) \quad \text{III.3}$$

bzw.

$$p = p_0 + \frac{q_2 f_0^2 \alpha}{\mu_0} \Phi + o(\Phi^2), \quad \text{III.4}$$

$$f = f_0 \{ 1 + \gamma \Phi + o(\Phi^2) \} \quad \text{III.5}$$

(mit den Bezeichnungen aus Kapitel II)

und setzt

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(\sigma, \theta) = & (\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \sigma^2 + \\ & + (\lambda_3 \cos^3 \theta + \lambda_4 \sin^2 \theta \cos \theta + \lambda_5 \sin \theta \cos^2 \theta + \lambda_6 \sin^3 \theta) \sigma^3, \\ & \lambda_1, \lambda_2 > 0\end{aligned}\quad \text{III.6}$$

an 1) 2), dann ist (bis zur hier betrachteten Ordnung) die Lösung der Gleichgewichtsgleichung III.1 gegeben durch:

$$\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \frac{q_0}{\lambda_1} + \frac{1}{2\lambda_1} (\alpha + \gamma) , \quad \text{III.7}$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 = & -3\lambda_3 + q_0 g_0 \lambda_1 \frac{(2 + \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \cos \Omega + \alpha q_0 g_0 \cos \Omega + \\ & + q_0 g_0 (\alpha + \gamma) \cos \Omega ,\end{aligned}\quad \text{III.8}$$

-
- 1) Um unendliche Kraftdichten zu vermeiden ($\nabla p \sim \nabla \bar{\Phi}$) und die Eindeutigkeit von ∇p zu gewährleisten, werden hier ausschließlich analytische Gleichgewichte betrachtet, für welche sich die Flußfunktion in einer Taylor-Reihe in σ und θ (mit $\bar{\Phi}_\sigma|_{\sigma=0} = 0$) um die magnetische Achse entwickeln läßt.
 - 2) Damit ist also gesichert, daß die Querschnitte der Flächen $\bar{\Phi} = \text{const.}$ mit den senkrecht zur magnetischen Achse stehenden Ebenen geschlossene Kurven sind und daß die Flußfunktion auf der magnetischen Achse ein Minimum hat (vgl. hierzu Kapitel II).

$$\lambda_5 = -3\lambda_6 - q_0 g_0 \lambda_1 \frac{(2\varepsilon^2 + 1)}{\varepsilon^2} \sin \Omega - \alpha q_0 \rho_0 \sin \Omega - \quad \text{III.9}$$

$$- q_0 \rho_0 (\alpha + \gamma) \sin \Omega.$$

Dabei sind:

q_0 : das Verhältnis T/R von Torsions- zu Krümmungsradius der magnetischen Achse (für Konfigurationen mit gerader magnetischen Achse ist also $q_0 = 0$) und

$$q_0 := (1 + \rho_0^2)^{-1}.$$

Die Gleichgewichtsparameter Ω und ε haben folgende Bedeutung ¹⁾: Seien $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ das begleitende Dreibein der magnetischen Achse (Tangente, Hauptnormale, Binormale). Wie aus III.6 folgt, sind (in zweiter Ordnung in σ) die Querschnitte der magnetischen Flächen mit den von $\vec{n}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebenen E entweder Kreise ($\lambda_1 = \lambda_2$) oder Ellipsen ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Für kreisförmige Querschnitte ist $\Omega = 0$. Sind die Querschnitte Ellipsen, dann bilden die beiden Halbachsen einer solchen Ellipse die Winkel Ω_1 und Ω_2 mit der Richtung $\vec{n}$ (von $\vec{n}$ in Richtung $\vec{b}$ gezählt). Ω wird als der kleinere der beiden

1) Vgl. Anhang II.

Winkel definiert (s. Abb. III.1). Die Größe ϵ stellt das Achsenverhältnis der elliptischen Querschnitte dar. Dabei steht im Nenner diejenige Halbachse, die die Richtung Ω definiert. Es ist also

$$\epsilon^2 = \frac{\Phi/\lambda_2}{\Phi/\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Die Parameter λ_i , $i = 1, \dots, 6$, sind offenbar mit den Ableitungen der Funktion Φ an der magnetischen Achse durch folgende Beziehungen verknüpft¹⁾:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\sigma \cos \theta)^2} \Big|_{\sigma=0}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\sigma \sin \theta)^2} \Big|_{\sigma=0},$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial (\sigma \cos \theta)^3} \Big|_{\sigma=0}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial (\sigma \cos \theta) \partial (\sigma \sin \theta)^2} \Big|_{\sigma=0},$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial (\sigma \cos \theta)^2 \partial (\sigma \sin \theta)} \Big|_{\sigma=0}, \quad \lambda_6 = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial (\sigma \sin \theta)^3} \Big|_{\sigma=0}.$$

Die Parameter λ_i , $i = 3, \dots, 6$, beschreiben die Abweichung der Querschnitte von der elliptischen Form in der dritten Ordnung in σ (s. Abb. III.2).

α und γ wurden in Kapitel II, S.12, erklärt.

1) Vgl. Anhang II.

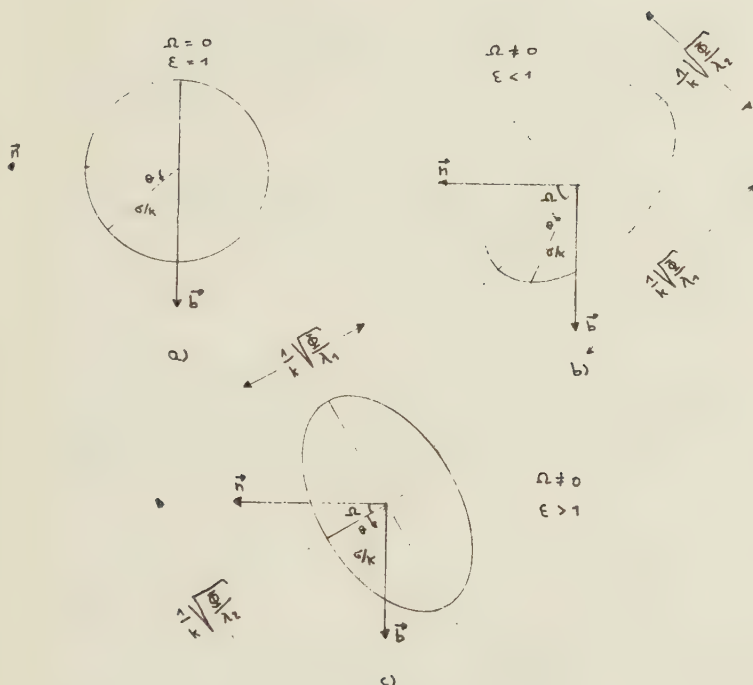
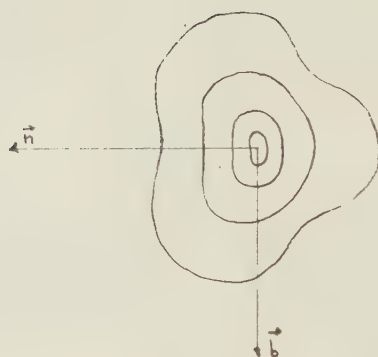


Abb. III.1

Querschnitte der Flächen $\bar{\Phi} = \text{const.}$ (bis zur zweiten Ordnung im Abstand von der magnetischen Achse) mit den senkrecht zur magnetischen Achse stehenden Ebenen:

- a) kreisförmige Querschnitte ($\epsilon = 1$),
- b) elliptische Querschnitte ($\epsilon < 1$),
- c) " " ($\epsilon > 1$).



$$\Omega = 0 ,$$

$$\varepsilon > 1 ,$$

$$\lambda_i \neq 0 , \quad i = 3, 4, 5 ,$$

$$\lambda_6 = 0$$

Abb. III.2

Beispiel für die Querschnitte der magnetischen Flächen
(bis zur dritten Ordnung in σ) mit den senkrecht zur
magnetischen Achse stehenden Ebenen.

Die Anwendung der hinreichenden Stabilitätskriterien [8] ist nur möglich, wenn die Stromdichte auf der magnetischen Achse verschwindet, d.h., wenn gilt:

$$\alpha + \gamma = 0 \quad 1) \quad \text{III.10}$$

Ist III.10 erfüllt, was im folgenden vorausgesetzt wird, dann ist (bis zur hier betrachteten Ordnung) die Lösung der Gleichgewichtsgleichung III.1 gegeben durch:

$$\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \frac{q_0}{\lambda_1} \quad , \quad \text{III.11}$$

$$\lambda_4 = -3\lambda_3 + \frac{q_0^2 \varphi_0 (2 + \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon^2)} \cos \Omega + \alpha q_0 \varphi_0 \cos \Omega \quad , \quad \text{III.12}$$

1) Daß in diesem Fall die Stromdichte auf der magnetischen Achse verschwindet, folgt aus AI.28 und III.2-6.

$$\lambda_5 = -3\lambda_6 - q_0^2 \varphi_0 \frac{(2\varepsilon^2+1)}{(1+\varepsilon^2)} \sin \Omega - \alpha q_0 \varphi_0 \sin \Omega.$$

III.13

Von den neun Parametern $\varphi_0, \varepsilon, \Omega, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ und α können sechs frei gewählt werden. Aus den Gleichungen III.11-13 folgen die weiteren drei ¹⁾.

1) Für die Anwendungen gelten dieselben Überlegungen wie in Kapitel II, Seite 20.

IV. UNTERSUCHUNG DER STABILITÄT

Für die Anwendungen in der Kernfusion sind solche Plasma-konfigurationen von besonderem Interesse, die gegenüber kleinen Störungen der Gleichgewichtslage stabil sind ¹⁾. Es soll deshalb in diesem Kapitel die Stabilität helikal-symmetrischer Konfigurationen der idealen Magnetohydro-dynamik untersucht werden.

Wie z.B. in [3] gezeigt wird, besitzt das hydromagnetische Gleichungssystem I.1-7 ein Energieintegral. Es gilt:

$$\iiint \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) d\tau := U = \text{const.} \quad \text{IV.1}$$

Dabei erstreckt sich das Integral über das gesamte Plasma- und Vakuumvolumen bzw. über das der Periodizitätslänge L entsprechende Volumen, falls es sich um Konfigurationen handelt, die wie die hier behandelten bis ins Unendliche reichen.

1) Stabiles Gleichgewicht im Sinne der idealen MHD bedeutet natürlich nicht, daß eine geometrisch analoge Plasma-konfiguration tatsächlich stabil sein muß, denn z.B. Teilchen-diffusion und Energieverlust quer zum Magnetfeld werden in der idealen MHD nicht berücksichtigt. Da jedoch in der Regel MHD Instabilitäten schneller zur Zerstörung des Gleichgewichtes führen als die sogenannten Mikroinstabilitäten, ist es wichtig, das Verhalten des Plasmas in der MHD Näherung zu untersuchen.

Der erste Term in IV.1 stellt die kinetische Energie des Plasmas dar. Der Ausdruck

$$W := \iiint \left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau \quad \text{IV.2}$$

kann als dessen potentielle Energie aufgefaßt werden.

Betrachtet man Störungen, die sich durch ein Verschiebungsfeld $\vec{\xi}$ beschreiben lassen ¹⁾, dann verschwindet im MHD Gleichgewicht die erste Variation der potentiellen Energie ²⁾.

Um Aussagen über die Stabilität machen zu können, untersucht man die zweite Variation $\delta^2 W$: ist sie positiv semidefinit für alle möglichen Störungen $\vec{\xi}$ (was in den hinreichenden Stabilitätskriterien gefordert wird), so ist die Konfiguration im Sinne der idealen MHD stabil. Wählt man eine spezielle Klasse von Störungen und ist für diese die zweite Variation der potentiellen Energie negativ, so ist das Gleichgewicht instabil ³⁾ (Bernsteinsches Energieprinzip ⁴⁾).

1) Dies ist der Fall, wenn, wie hier, für jedes mit der Strömung bewegte Volumen die Störung die Masse, die Entropie und für jede Fläche den hindurchgehenden magnetischen Fluß ungeändert läßt.

2) Vgl. z. B. [3].

3) Die Störung wächst exponentiell mit der Zeit. Vgl. [25].

4) Vgl. [17], [24].

Schreibt man das Bernsteinsche Energieprinzip in der Form

$$\delta^2 W = \frac{1}{2} \iiint d\tau \left\{ \mu_0 \left| \nabla \times \left(\frac{\vec{\xi} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\vec{J} \times \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \vec{\xi} \cdot \nabla \psi \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{5}{3} \rho (\nabla \cdot \vec{\xi})^2 - A |\nabla \psi|^2 (\vec{\xi} \cdot \nabla \psi)^2 \right\} \geq 0 \quad 1) \quad \text{IV.3}$$

(ψ sei das von den magnetischen Flächen eingeschlossene Volumen pro Periode) ,

wobei $A := 2 |\nabla \psi|^{-6} (\vec{J} \times \nabla \psi) \cdot (\vec{B} \cdot \nabla) \nabla \psi$ ist, IV.4

so ist offensichtlich die Bedingung $A \leq 0$ ein hinreichendes Stabilitätskriterium; für realistische Konfigurationen ist sie jedoch zu streng und deshalb nicht sehr interessant. In [8] wird für Gleichgewichte, bei denen die Stromdichte auf der magnetischen Achse verschwindet und die periodisch entlang der magnetischen Feldlinien sind, eine Klasse von weniger strengen hinreichenden Stabilitätskriterien abgeleitet.

1) vgl. [8], [17].

Eines von ihnen lautet:

$$\langle A \rangle \leq - \frac{\mu_0 \chi^2}{4\pi^2} \cdot \left| \frac{dV}{dF} \right|^2 \langle A^2 \rangle, \quad 1) \quad \text{IV.5}$$

wobei die spitzen Klammern Mittelwerte über die magnetischen Flächen bedeuten:

$$\langle A \rangle = \frac{k}{2\pi\chi} \oint dS \, |\nabla \chi| A, \quad \text{entsprechend } \langle A^2 \rangle, \quad \text{IV.6}$$

dS das Flächenelement auf den magnetischen Flächen und

$$\chi := \frac{k}{2\pi} \oint dS \, |\nabla \chi|. \quad \text{IV.7}$$

-
- 1) Diese Bedingung gilt nur in der Nähe der magnetischen Achse (s. Anhang IV).
 Nach [8] gibt es für die Wahl der rechten Seite von IV.5 verschiedene Möglichkeiten, die z. T. in [8], z.T. in [18] explizit angegeben werden. Ein im Rahmen dieser Arbeit durchgeführter Vergleich der verschiedenen Kriterien [8, 18] zeigte, daß für die hier untersuchten Gleichgewichte die Bedingung IV.5 sowohl das günstigste (am wenigsten strenge) als auch das übersichtlichste Kriterium liefert.

Setzt man die Ergebnisse von Anhang III in IV.5 ein,
so ergibt sich die Bedingung

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{4q_0 \varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2} + \frac{3q_0}{q_0} \frac{(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \{ \lambda_3 \cos \Omega + \varepsilon^2 \lambda_4 \sin \Omega \} - \\
 - \frac{g_0^2 \alpha (1-\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \{ (\varepsilon+2) - 2(\varepsilon^2+\varepsilon+1) \sin^2 \Omega \} \leq \quad \text{IV.8} \\
 \frac{g_0^2 \alpha}{2^6} \frac{(1+\varepsilon^2)^3}{\varepsilon^7} \left[(5\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2 + 7) \cos^2 \Omega + (7\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2 + 5) \sin^2 \Omega \right]
 \end{aligned}$$

(als hinreichendes Stabilitätskriterium).

Weiter ergibt sich für das notwendige Stabilitätskriterium
von Mercier ([7] , Gl.53) :

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{4q_0 \varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2} + \frac{3q_0}{q_0} \frac{(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \{ \lambda_3 \cos \Omega + \varepsilon^2 \lambda_4 \sin \Omega \} - \\
 - \frac{g_0^2 \alpha (1-\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \{ (\varepsilon+2) - 2(\varepsilon^2+\varepsilon+1) \sin^2 \Omega \} \leq 0 . \quad \text{IV.9}
 \end{aligned}$$

Die in den Beziehungen IV.8,9 auftretenden Parameter wurden
in Kapitel II, S.12 und in Kapitel III, S.29,30, erklärt.
Ist die Bedingung IV.8 erfüllt, so bedeutet dies, daß MHD-
Stabilität gesichert ist, solange man in der Entwicklung
von Φ nach ω die Terme vierter und höherer Ordnung in ω
vernachlässigen darf.

Die Bedingung, daß die Stromdichte auf der magnetischen Achse verschwindet, hat zur Folge, daß für den Längsstrom J gilt: $J \sim o(v^2)$ 1). Daher ist in den Stabilitätskriterien AIII.17 und AIV.10 der von J herrührende Term in der hier betrachteten Näherung vernachlässigbar, so daß die hier untersuchten Konfigurationen Gleichgewichten ohne Längsstrom entsprechen.

Zieht man die Gleichgewichtsgleichung in der Gestalt $\dot{p} = \dot{i}\dot{\psi} - j\dot{\lambda}$ 2) (s. z. B. [19]) heran, so ergibt sich mit A III.1, 15:

$$\langle A \rangle = \frac{\kappa}{2\pi X} \left\{ -\dot{p} v''(\psi) + \mu_0 \oint \frac{j^2}{|rv|^3} dS \right\}, \quad \text{IV.10}$$

wobei

$$v''(\psi) = \frac{\kappa(1+\epsilon^2)}{\sqrt{q_0} \int_0^2 \epsilon} \left[1 - \frac{4q_0\epsilon^2}{(1+\epsilon^2)^2} + \frac{3q_0}{q_0} \frac{(1-\epsilon^2)}{\epsilon^2} \{ \lambda_3 \cos \Omega + \right. \\ \left. + \epsilon^2 \lambda_6 \sin \Omega \} + \frac{2\alpha\epsilon^2}{(1+\epsilon^2)^2} + \alpha g_0^2 \right] + o(\psi) \quad 3) \quad \text{IV.11}$$

1) Vgl. AIII.15.

2) Die Punkte bedeuten Ableitungen nach dem Volumen. Die Ströme und die magnetischen Flüsse I , J , ψ und χ sind im Anhang III angegeben.

3) Vgl. Anhang III.

Mit IV.10 sieht man sofort, daß für abfallenden Druck ($\dot{p} < 0$) das notwendige Stabilitätskriterium $\langle A \rangle < 0$ nur mit einer sogenannten magnetischen Mulde ($v''(0) < 0$)^{1) 2)} erfüllt werden kann.- Sind die geometrischen Parameter des Gleichgewichts gegeben (φ_0 , ε , Ω , λ_1 , λ_2 , $R_R^2 := \frac{\Psi_{RAND}}{\pi^2 B_0}$), dann stellen die Kriterien IV.8, 9 Bedingungen für das zulässige Verhältnis von Plasma- zu magnetischer Energiedichte auf der magnetischen Achse dar, denn es gilt:

$$2\mu_0 p_0 / B_0^2 = -2q_0 \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)} k^2 R_R^2 \alpha = -2\alpha \overset{3)}{\Phi}_{RAND} \quad \text{IV.12}$$

Mit Hilfe der Kriterien IV.8,9 kann man nun die Stabilität einiger Konfigurationen diskutieren:

a) Der Theta-Pinch:

In diesem Fall verschwindet die Krümmung der magnetischen Achse, d.h. $\varphi_0 = 0$, und die Querschnitte der magnetischen

- 1) Der Gleichung IV.11 kann man entnehmen, daß der Stabilisierungseffekt von $v''(0)$ mit dem Druck steigt und daß für $\varepsilon = 1$ die Bedingung $v''(0) < 0$ nur mit endlichem Druck erfüllt werden kann (vgl. [20]).
- 2) Aus $v''(0) < 0$ folgt, daß die über die Flächen $p = \text{const.}$ gemittelte magnetische Energiedichte $B^2/2\mu_0$ nach außen monoton zunimmt (vgl. z.B. [20], [5]).
- 3) IV.12 folgt aus III.2,6, AIII.9,14 und der Definition von $R: \Psi_{Rand} := B_0 \cap R^2$. Dabei ist $k^2 R_R^2 \ll 1$ (vgl. AII.5) und B_0 der Betrag von $\vec{B}$ auf der magnetischen Achse.

Flächen sind kreisförmig ($\varepsilon = 1$). Das notwendige

Kriterium IV.9 wird dann nur marginal erfüllt.

Beschreibt man kleine Abweichungen vom Theta-Pinch durch

$$\varphi_0 \ll 1 \quad ,$$

$$\varepsilon = 1 + o(\varphi_0) \quad ,$$

IV.13

$$\lambda_3 \sim o(\varphi_0) \quad ,$$

dann ergibt sich für die linke Seite von IV.9 ein in φ_0^2 positiv definiter Ausdruck. Die durch IV.13 beschriebenen Gleichgewichte sind also instabil ^{1) 2)}.

b) Helikalsymmetrische Konfigurationen mit kreisförmigen Querschnitten ($\varepsilon = 1$) und beliebiger Krümmung k_{q_0} der magnetischen Achse: es ergibt sich, daß auch in diesem

1) Für $\varphi_0 = 0$, $\varepsilon = 1$, λ_3 endlich existieren stabile Gleichgewichte. Dies wird in [21] gezeigt.

2) Dies widerspricht den Ergebnissen in [22]: danach kann, wenn IV.13 gilt, das Kriterium $\langle A \rangle < 0$ durch eine geeignete Wahl der Parameter, die die Abweichung der Querschnitte von der elliptischen Form beschreiben, erfüllt werden.

Nach Auskunft des Autors von [22] rührt die Diskrepanz von einem Fehler bei der Integration im Ausdruck IV.31 in [22] her.

Fall das Kriterium IV.9 nicht erfüllt werden kann.-Das gleiche Ergebnis wurde in [23] auf anderem Weg abgeleitet.

c) Stabile helikalsymmetrische Gleichgewichte:

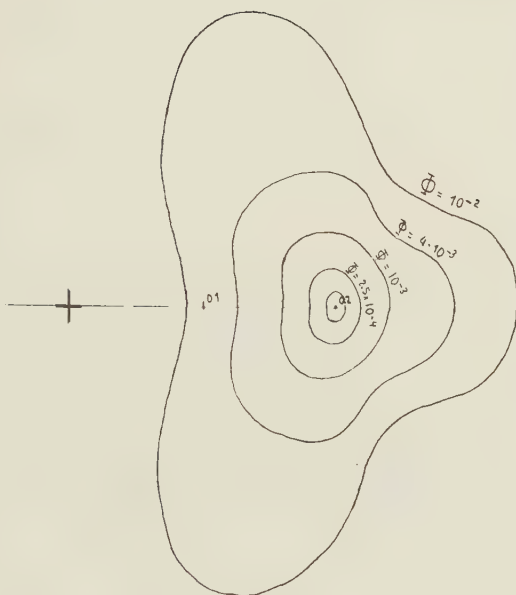
im allgemeinen Fall ($\varrho_0 \neq 0, \xi \neq 1$) kann man nicht nur durch geeignete Wahl der Parameter $\lambda_3, \lambda_6, \Omega, \alpha$ den stabilisierenden Effekt von $v''(0)$ erhöhen, sondern auch stabile Gleichgewichte selbst konstruieren.- Damit die Parameter, die die Abweichung der Querschnitte von der elliptischen Form beschreiben, nicht zu groß werden, dürfen dabei ϱ_0 und $\xi-1$ offensichtlich nicht zu dicht bei Null liegen: bei der Entwicklung $\Phi = a(\vartheta)\sigma^2 \left\{ 1 + \frac{b(\vartheta)}{a(\vartheta)}\sigma + o(\sigma^2) \right\}$ (AII.8) wurde angenommen, daß die Ordnung von $\{b(\vartheta)/a(\vartheta)\}\sigma$ durch σ bestimmt wird. Je größer λ_3 bzw. λ_6 sind, desto kleiner ist das Intervall $[0, \sigma]$, in dem die Näherung gültig bleibt.

Zur Illustration sind in den Abbildungen IV.I-IV für verschiedene stabile Gleichgewichte und Gleichgewichtsparameter die Querschnitte der magnetischen Flächen mit einer senkrecht zur magnetischen Achse stehenden Ebene wiedergegeben (die Längen verstehen sich in Einheiten von $1/k$). Das eingezeichnete Kreuz markiert den Durchstoßpunkt der Symmetrieachse (z-Achse), um die sich das gesamte Gebilde spiralförmig windet.- Die Form der Querschnitte

ist immer so geartet, daß der stabilisierende Effekt von $v''(\psi \neq 0)$ erhöht wird und die Konfigurationen gemäß IV.8 stabil sind: liegt die große Halbachse der Querschnitte, die in zweiter Ordnung in σ Ellipsen sind, senkrecht bzw. parallel zum Hauptkrümmungsvektor der magnetischen Achse, so muß in dritter Ordnung ein nierenförmiger Querschnitt gewählt werden derart, daß seine (von außen gesehen) konkave Seite der Symmetrieachse zu- bzw. abgewandt ist. Liegt die große Halbachse der Querschnitte weder senkrecht noch parallel zum Hauptkrümmungsvektor der magnetischen Achse, so müssen ebenfalls nierenförmige Querschnitte gewählt werden, jedoch in allgemeiner (von den Gleichgewichtsparametern abhängiger) Lage.

Für die Bedeutung der Ergebnisse in den Anwendungen gelten die gleichen Überlegungen wie in Kapitel II, S.20. Dabei muß man berücksichtigen, daß Stabilität nur dann gesichert ist, wenn man in der Entwicklung von Φ nach σ (vgl. Gl. III.6) die Terme vierter und höherer Ordnung in σ und in der Entwicklung von p' und f nach Φ (vgl. Gl. III.2-5) die Terme zweiter und höherer Ordnung in Φ vernachlässigen darf. Für die Untersuchung der Stabilität auf magnetischen Flächen, für die diese Annahmen nicht zutreffen, ist man auf numerische Rechnungen angewiesen.

a) $\lambda = \lambda_0$ - Ebene.



b) $\lambda = \lambda_0 + \frac{1.2\pi}{4\sqrt{q_0}}$ - Ebene.



+

Abb. IV.1

$$\Omega = 0, \quad q_0 = 0.2, \quad \varepsilon^2 = 2, \quad \lambda_3 = 1.2, \quad \alpha = -15, \quad \lambda_6 = 0.$$

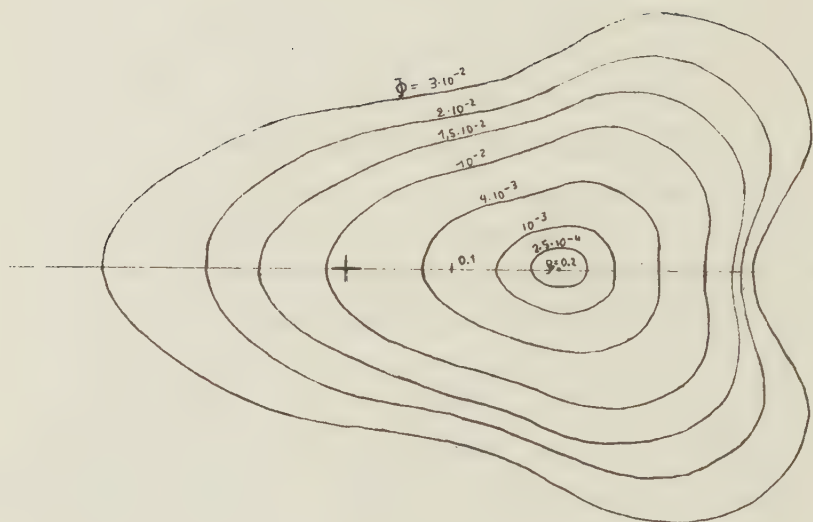


Abb. IV. II

$\Omega = 0$, $\epsilon^2 = 0.5$, $\varphi_0 = 0.2$, $\lambda_3 = -0.9$, $\lambda_6 = 0$, $\alpha = -2$.

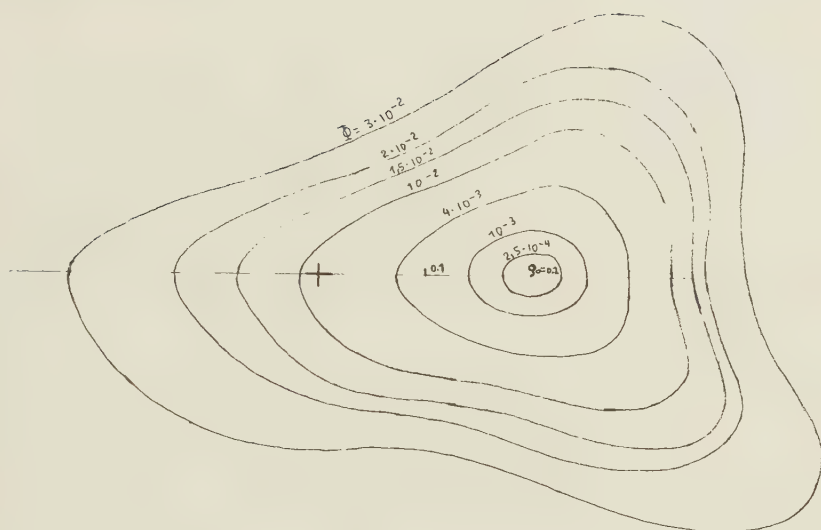


Abb. IV.III

$\lambda_6 = 0.5$, sonst wie Abb. IV.II.

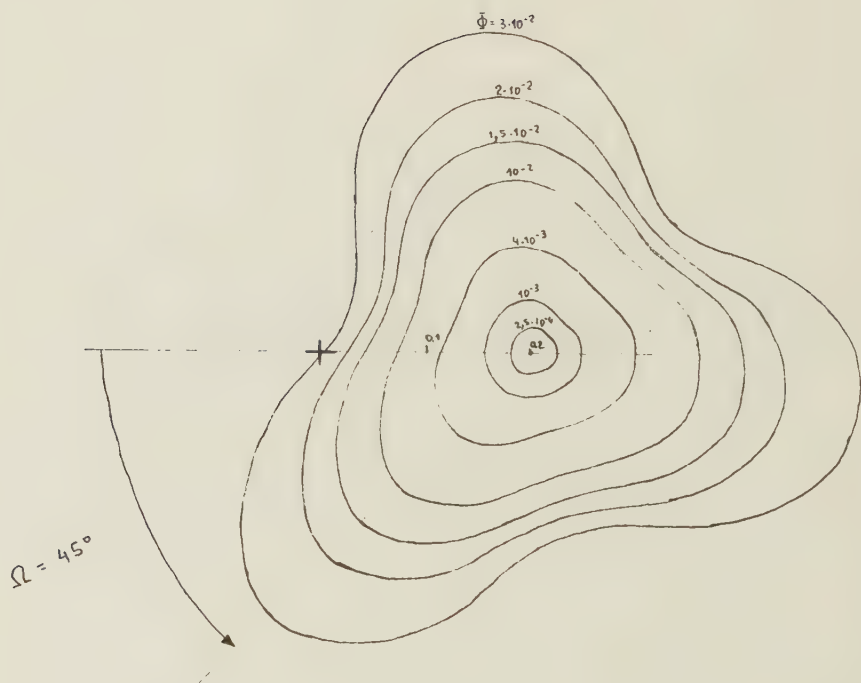


Abb. IV.IV

$\Omega = 45^\circ$, $\varepsilon = 0.9$, $g_0 = 0.2$, $\lambda_3 = -1.1$, $\lambda_6 = 0$, $\alpha = -1.39$.

ANHANG I

HELIKALE SYMMETRIE UND DIE DARSTELLUNG DER HELIKALSYMMETRISCHEN,
DIVERGENZFREIEN GLEICHGEWICHTSFELDER $\vec{B}$ UND $\vec{j}$ DURCH EINE SKALARE
FUNKTION F ¹⁾

Ausgehend von einem Zylinderkoordinatensystem s, φ, z werden die helikalen Koordinaten $s, u = \varphi + kz$ und z eingeführt (s. Abb. AI.1). k hat offensichtlich die Dimension Länge⁻¹ ; die Größe $2\pi/k$ stellt die Schrittlänge der Schraubenlinien $s = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ dar .

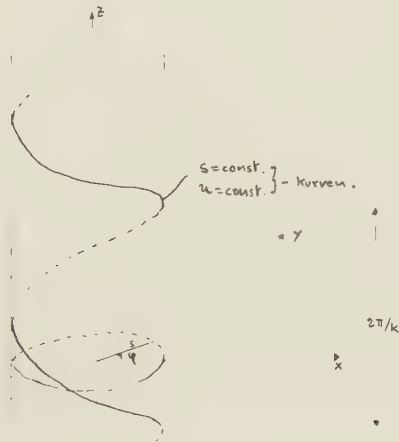


Abb. AI.1

1) vgl. z. B. [9], [10], [13], [14].

Oft ist es zweckmäßig, anstatt s das Verhältnis $T/R := q$ von Torsions- zu Krümmungsradius für die Charakterisierung der Schraubenlinien heranzuziehen. Es gilt:

$$R = \frac{1 + k^2 s^2}{k^2 s} = \frac{1}{k^2 s} q, \quad \text{AI.1}$$

$$T = \frac{1 + k^2 s^2}{k} = \frac{1}{k} q, \quad \text{AI.2}$$

$$\frac{T}{R} = ks := q. \quad \text{AI.3}$$

Wenn man verlangt, daß die skalaren physikalischen Größen helikalsymmetrisch sind, dann bedeutet dies, daß sie ausschließlich von s und u abhängen dürfen, d.h., sie sollen auf Schraubenlinien konstant sein. Wegen der Eindeutigkeit müssen sie periodisch in φ sein, und demnach auch in u , mit Periode 2π . Wegen der vorausgesetzten Symmetrie sind sie periodisch in z , mit Periode $2\pi/k$.

Das helikale Koordinatensystem s, u, z hat die kovariante Basis

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{e}_s, \quad \text{AI.4}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = s \vec{e}_\varphi, \quad \text{AI.5}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = -ks \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z \quad \text{AI.6}$$

und die kontravariante Basis

$$\nabla s = \vec{e}_s, \quad \text{AI.7}$$

$$\nabla u = \frac{1}{s} \vec{e}_\varphi + k \vec{e}_z, \quad \text{AI.8}$$

$$\nabla z = \vec{e}_z, \quad \text{AI.9}$$

wobei $\vec{r}$ der Ortsvektor, $\vec{e}_s, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ die üblichen Basisvektoren eines Zylinderkoordinatensystems sind.

Wie in [9] gezeigt wird (s. insbesondere Satz 7, Gleichung 35) läßt sich jedes helikalsymmetrische, divergenzfreie Vektorfeld $\vec{B}$ durch zwei eindeutige Skalare B^z und F

darstellen in der Form

$$\vec{g} = B^z(s, u) \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} + \nabla z \times \nabla F(s, u) , \quad \text{AI.10}$$

wobei $B^z = \vec{B} \cdot \nabla z$.

Stellt $\vec{B}$ das Magnetfeld dar und sind die magnetostatischen Gleichungen (s. S. 2,3)

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} , \quad \text{AI.11}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} , \quad \text{AI.12}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{AI.13}$$

1)
erfüllt, so sind B_z und F voneinander abhängig; eine Darstellung der Felder $\vec{B}$ und $\vec{j}$ in der Form I.12,16 ist dann möglich, wie im folgenden gezeigt wird; dabei wird angenommen, daß ∇p , $\vec{j}$ und $\vec{B}$ verschieden von Null sind.

Führt man das Vektorfeld $\vec{w}$ ein durch

$$\vec{w} := sq \nabla s \times \nabla u = q \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right)_{s,u} , \quad q := (1 + k^2 s^2)^{-1} , \quad \text{AI.14}$$

1) $B_z := \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right)_{s,u}$.

dann gilt :

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0 \quad , \quad \text{AI.15}$$

$$\nabla \times \vec{w} = -2kq \vec{w} \quad \text{AI.16}$$

und $\nabla G \cdot \vec{w} = 0 \quad , \quad \text{AI.17}$

wobei G eine beliebige differenzierbare, skalare, helikalsymmetrische Funktion darstellt.

Mit Hilfe von $\vec{w}$ und der Beziehung $\nabla z = \vec{w} + ks^2 q \nabla u$ läßt sich AI.10 in der Form

$$\vec{B} = \left(\frac{B_z}{q} - ks F_5 \right) \vec{w} + \vec{w} \times \nabla F \quad \text{AI.18}$$

schreiben. Führt man das Vektorpotential $\vec{A}$ durch

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{sq} \left(\frac{\partial A_u}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial u} + ks^2 q \frac{\partial A_z}{\partial s} \right) \vec{w} + \nabla A_z \times \vec{w} \quad \text{AI.19}$$

ein, mit den kovarianten Komponenten A_s, A_u, A_z , so ergibt sich durch Vergleich von AI.18 mit AI.19:

$$F = -A_z + \text{const.} \quad \text{AI.20}$$

Das innere Produkt von AI.18 mit $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right)_{s,u}$ ergibt

$$B_z := \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right)_{s,u} = \frac{B_z}{q} - ks F_5 \quad \text{AI.21}$$

Es ist demnach

$$\vec{B} = B_z(s, u) \vec{w} + \vec{w} \times \nabla F. \quad \text{AI.22}$$

Entsprechend ergibt sich, da $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ und $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}$,

$$\vec{j} = J_z(s, u) \vec{w} - \frac{1}{\mu_0} \vec{w} \times \nabla B_z. \quad \text{AI.23}$$

Berücksichtigt man, daß $\vec{w} \cdot \nabla p = 0$ (AI.17), so folgt aus AI.11,22:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla p \cdot \vec{B} = \nabla p \cdot (\vec{w} \times \nabla F) = \vec{w} \cdot (\nabla F \times \nabla p) = \\ &= (F_s p_u - p_s F_u) \cdot \frac{1}{s} \quad 1) \end{aligned}$$

Demnach ist $\nabla p \parallel \nabla F$, d.h.

$$p = p(F) \quad \text{AI.24}$$

Entsprechend folgt aus AI.11,17,22,23:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{B} \cdot \nabla p = \vec{B} \cdot (J_z \vec{B}) = \\ &= -\vec{B} \cdot (J_z q \nabla F + \frac{1}{\mu_0} B_z q \nabla B_z) = \\ &= -\frac{q}{\mu_0} B_z \vec{w} \cdot (\nabla F \times \nabla B_z), \end{aligned}$$

d.h. $\nabla F \parallel B_z$,

$$B_z = B_z(F). \quad \text{AI.25}$$

Unter Berücksichtigung von AI.22-25 ergibt das äußere Produkt von AI.11 mit $\vec{w}$:

$$\frac{dp}{dF} \nabla F \times \vec{w} = -q \left(J_z + \frac{1}{\mu_0} B_z \frac{dB_z}{dF} \right) \nabla F \times \vec{w},$$

d.h.

$$J_z = - \left(\frac{p'}{q} + \frac{1}{\mu_0} B_z B_z' \right), \quad ' := \frac{d}{dF}. \quad \text{AI.26}$$

1) Dies folgt aus AI.14 und der Tatsache, daß F und p helikalsymmetrisch sind.

Mit $B_z := f$ gehen dann AI.22,23 in

$$\vec{B} = f(F) \vec{w} + \vec{w} \times \nabla F, \quad \text{AI.27}$$

$$\vec{j} = - \left(\frac{\rho'}{q} + \frac{1}{\mu_0} f f' \right) \vec{w} - \frac{f'}{\mu_0} \vec{w} \times \nabla F \quad \text{AI.28}$$

über.

Bildet man unter Berücksichtigung von AI.16 die Rotation von AI.27, dann ergeben AI.11,12 die Gleichgewichtsgleichung I.14.

ANHANG II

ZWECKMÄSSIGE DARSTELLUNG VON MHD GLEICHGEWICHTEN IN DER NÄHE
DER MAGNETISCHEN ACHSE DURCH GEEIGNETE KOORDINATENSYSTEME

Ähnlich wie in [15] und [16] wird auch hier ein auf die magnetische Achse bezogenes Koordinatensystem eingeführt: Mögen einem Raumpunkt P (s. Abb. AII.1) die Koordinaten σ^* , ω und ϱ^* entsprechen.- ϱ^* ist

$\vec{t}$: Tangentenvektor

$\vec{n}$: Hauptnormale

$\vec{b}$: Binormale

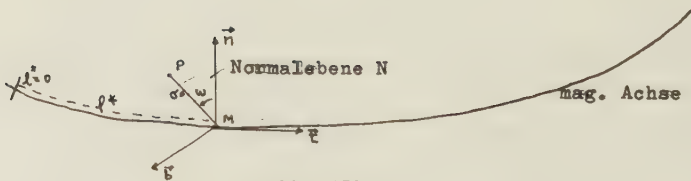


Abb. AII.1

die krummlinige Koordinate von M , Schnittpunkt der magnetischen Achse mit der durch P gehenden Normalenebene N. σ^* und ω sind Polarkoordinaten auf N, wobei der Winkel ω so gezählt wird, daß für die Hauptnormale

$\omega = 0$, für die Binormale $\omega = \pi/2$ gilt.

Ist die magnetische Achse einer Gleichgewichtskonfiguration eine Schraubenlinie, gegeben etwa durch $s = s_0$, $u = 0$ (vgl. Anhang I), dann gelten folgende Beziehungen¹⁾:

$$s^2 = s_0^2 + \sigma^{*2} - 2s_0\sigma^* \cos \omega - q_0 k^2 s_0^2 \sigma^{*2} \sin^2 \omega, \quad \text{AII.1}$$

$$u = \arccos \left[\frac{s_0 - \sigma^* \cos \omega}{s(\sigma^*, \omega)} \right] - k^2 s_0 \sqrt{q_0} \sigma^* \sin \omega, \quad \text{AII.2}$$

$$z = \sqrt{q_0} [l^* - k s_0 \sigma^* \sin \omega]. \quad \text{AII.3}$$

Den Gleichungen AII.1-3 kann man entnehmen, daß helikalsymmetrische Größen nicht von l^* abhängen.

Im Koordinatensystem σ^* , ω , l^* werden die magnetische Achse durch $\sigma^* = 0$, eine beliebige Helix durch $\sigma^* = \text{const.}$, $\omega = \text{const.}$ beschrieben.

1) s , u , z : helikale Koordinaten.

$2\pi/k$: Schrittlänge der Schraubenlinien.

$q_0 = (1 + k^2 s_0^2)^{-1}$.

Bis zur dritten Ordnung in der Entwicklung nach σ ¹⁾ lassen sich die durch die helikalsymmetrische, dimensionslose Flußfunktion Φ charakterisierten magnetischen Flächen²⁾ durch die Gleichung

$$\Phi(\sigma, \omega) = (\Lambda_1 \cos^2 \omega + \Lambda_2 \cos \omega \sin \omega + \Lambda_3 \sin^2 \omega) \sigma^2 +$$

AII.4

$$+ (\Lambda_4 \cos^3 \omega + \Lambda_5 \cos \omega \sin^2 \omega + \Lambda_6 \cos^2 \omega \sin \omega + \Lambda_7 \sin^3 \omega) \sigma^3,$$

$$\sigma^2 := k^2 \epsilon^2 \ll 1 \quad 3)$$

AII.5

beschreiben.

Vernachlässigt man in AII.4 die Terme dritter Ordnung in σ , so zeigt die Abbildung AII.2 einen typischen Querschnitt der magnetischen Flächen mit einer Normalebene zur magnetischen Achse.

1) Um unendliche Kraftdichten zu vermeiden ($\nabla p \sim \nabla \Phi$) werden hier ausschließlich analytische Gleichgewichte betrachtet, für welche sich die Flußfunktion in einer Taylor-Reihe um die magnetische Achse entwickeln läßt.

2) Vgl. II.4.

3) Da $2\pi/k$ die Ganghöhe der Schraubenlinien darstellt, ist σ dimensionslos.

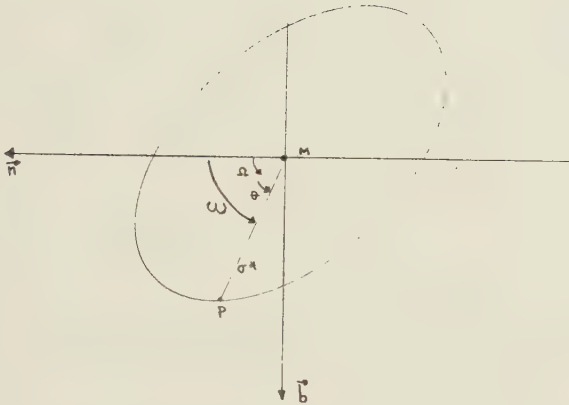


Abb.II.2

Definiert man einen Winkel θ durch

$$\theta := \omega - \Omega ,$$

AII.6

wobei $\operatorname{tg} 2\Omega := \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda_2} , \quad 0 \leq \Omega < \frac{\pi}{2} ,$

AII.7

dann geht AII.4 in

$$\Phi = (\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \sigma^2 +$$

AII.8

$$+ (\lambda_3 \cos^2 \theta + \lambda_4 \cos \theta \sin^2 \theta + \lambda_5 \cos^2 \theta \sin \theta + \lambda_6 \sin^2 \theta) \sigma^3,$$

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0$$

über, mit

$$\lambda_1 = \mathcal{A}_1 \cos^2 \Omega + \mathcal{A} \sin \Omega \cos \Omega + \mathcal{A}_2 \sin^2 \Omega,$$

$$\lambda_2 = \mathcal{A}_1 \sin^2 \Omega - \mathcal{A} \sin \Omega \cos \Omega + \mathcal{A}_2 \cos^2 \Omega,$$

$$\lambda_3 = \mathcal{A}_3 \cos^3 \Omega + \mathcal{A}_4 \cos \Omega \sin^2 \Omega + \mathcal{A}_5 \sin \Omega \cos^2 \Omega + \mathcal{A}_6 \sin^3 \Omega,$$

AII.9

$$\lambda_4 = 3\mathcal{A}_3 \cos \Omega \sin^2 \Omega + \mathcal{A}_4 \cos^3 \Omega + \mathcal{A}_5 \sin^3 \Omega - \\ - 2\mathcal{A}_5 \sin \Omega \cos^2 \Omega + 3\mathcal{A}_6 \sin \Omega \cos^2 \Omega - 2\mathcal{A}_4 \sin^2 \Omega \cos \Omega,$$

$$\lambda_5 = -3\mathcal{A}_3 \cos^2 \Omega \sin \Omega - \mathcal{A}_4 \sin^3 \Omega + \mathcal{A}_5 \cos^3 \Omega \\ - 2\mathcal{A}_5 \sin^2 \Omega \cos \Omega + 3\mathcal{A}_6 \sin^2 \Omega \cos \Omega + 2\mathcal{A}_4 \sin \Omega \cos^2 \Omega,$$

$$\lambda_6 = -\mathcal{A}_3 \sin^3 \Omega - \mathcal{A}_4 \sin \Omega \cos^2 \Omega + \mathcal{A}_5 \sin^2 \Omega \cos \Omega + \mathcal{A}_6 \cos^3 \Omega$$

und 1) 2)

$$\Lambda_1 := \left. \frac{\Phi_{\vartheta\vartheta}}{2} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}}, \quad \Lambda_2 := \frac{1}{2\vartheta_0^2 q_0} \left. \Phi_{uu} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}},$$

$$\Lambda := \frac{1}{\vartheta_0 \sqrt{q_0}} \left. \Phi_{\vartheta u} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}},$$

$$\Lambda_3 := -\frac{1}{6} \left. \Phi_{\vartheta\vartheta\vartheta} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}},$$

AII.10

$$\Lambda_4 := -\frac{1}{2\vartheta_0} \left[\frac{1}{\vartheta_0 q_0} \left. \Phi_{\vartheta uu} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}} - \frac{2}{\vartheta_0^2} \left. \Phi_{uuu} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}} + q_0 \left. \Phi_{\vartheta\vartheta} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}} \right],$$

$$\Lambda_5 := -\frac{1}{2\vartheta_0 \sqrt{q_0}} \left[\left. \Phi_{\vartheta\vartheta u} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}} - \frac{2q_0}{\vartheta_0} \left. \Phi_{\vartheta u} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}} \right],$$

$$\Lambda_6 := -\frac{1}{6\vartheta_0^2} \left[\frac{1}{\vartheta_0 q_0^{3/2}} \left. \Phi_{uuu} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}} + 3\sqrt{q_0} \left. \Phi_{\vartheta u} \right|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}} \right].$$

1) Diese Beziehungen werden explizit aufgeführt, um die Anwendung der Stabilitätskriterien IV.8,9 auf die Lösungen aus Kapitel II zu erleichtern.

2) Es wird dabei angenommen, daß $\Phi(\vartheta, u)$ auf der magnetischen Achse tatsächlich ein Minimum hat, also daß die Beziehungen

$$\Phi_{\vartheta}|_{\vartheta_0} = \Phi_u|_{\vartheta_0} = 0, \quad \left[\Phi_{\vartheta\vartheta} \Phi_{uu} - \Phi_{\vartheta u}^2 \right] \Big|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}} > 0, \quad \Phi_{\vartheta\vartheta} \Big|_{\substack{\vartheta=\vartheta_0 \\ u=0}} > 0$$

erfüllt sind.

Das Koordinatensystem $\sigma, \theta, \ell := k\ell^*$ ¹⁾ besitzt den metrischen Tensor

$$g^{\sigma\sigma} = k^2 ,$$

$$g^{\theta\theta} = k^2 \left[\frac{1}{\sigma^2} + \frac{q^2 \sigma^2 D^2}{k^4} \right] ,$$

$$g^{\ell\ell} = \frac{\sigma^2 D^2}{k^4} ,$$

$$g^{\sigma\theta} = 0 ,$$

AII.11

$$g^{\theta\ell} = \frac{q_0 \sigma^2 D^2}{k^4} ,$$

$$g^{\ell\theta} = 0 ,$$

$$\frac{1}{D} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \ell} = \frac{\sigma}{k^3} \left[1 - q_0 g_0 \sigma \cos(\Omega + \theta) \right] .$$

1) Demnach ist auch ℓ dimensionslos.

Es ist oft zweckmäßig, vor allem für die Berechnung der bei der Anwendung von Stabilitätskriterien auftretenden Oberflächenintegrale, anstatt σ die Flußfunktion (F bzw. Φ) als unabhängige Variable zu betrachten. Es gilt dann, entsprechend AII.8 :

$$\sigma(\Phi, \theta) = \sqrt{\Phi/a(\theta)} \left[1 - \frac{b(\theta)}{2a(\theta)} \sqrt{\Phi/a(\theta)} + o(\Phi) \right] , \quad \text{AII.12}$$

wobei

$$a(\theta) := \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta , \quad \text{AII.13}$$

$$b(\theta) := \lambda_3 \cos^3 \theta + \lambda_4 \cos \theta \sin^2 \theta + \lambda_5 \cos^2 \theta \sin \theta + \lambda_6 \sin^3 \theta . \quad \text{AII.14}$$

Das Koordinatensystem Φ, θ, l hat dann den metrischen Tensor

$$\bar{g}_{\Phi\Phi} = \frac{1}{k^2} \sigma^2 ,$$

$$\bar{g}_{\theta\theta} = \frac{1}{k^2} (\sigma^2 + \sigma_\theta^2) ,$$

$$\bar{g}_{11} = q_0 / k^2 q(\sigma, \theta) \quad ,$$

$$\bar{g}_{12} = \frac{1}{k^2} \sigma_{\theta} \sigma_{\varphi} \quad ,$$

AII.15

$$\bar{g}_{13} = 0 \quad ,$$

$$\bar{g}_{22} = -\frac{1}{k^2} q_0 \sigma^2 \quad ,$$

$$\frac{1}{D} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \ell} = \frac{\sigma \sigma_{\theta}}{k^3} [1 - q_0 \rho_0 \sigma \cos(\theta + \Omega)] \quad .$$

Dabei gilt für die in Anhang I eingeführte Größe

$$q := (1 + k^2 s^2)^{-1} :$$

$$q(\sigma, \theta) = q_0 [1 + 2q_0 \rho_0 \sigma \cos(\Omega + \theta) + q_0^2 \sigma^2 \{3\rho_0^2 \cos^2(\theta + \Omega) - 1\}]$$

AII.16

(bis zur zweiten Ordnung in σ) .

Für die Untersuchung der Gleichgewichte in der Nähe der magnetischen Achse ist es zweckmäßiger, anstatt I.14, 15 die Gleichgewichtsgleichung I.13 in den Koordinaten

σ, θ auszudrücken ¹⁾:

$$\frac{D}{q} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{q}{D} g^{\sigma\sigma} F_{\sigma} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{q}{D} g^{\theta\theta} F_{\theta} \right] =$$

AII.17

$$= 2kqf - ff' - \frac{\mu_0}{q} p' , \quad ' := \frac{d}{dF} .$$

1) Die Ableitung der Gleichung AII.17 erfolgt völlig analog der von Gl. I.14. Man muß berücksichtigen, daß die helikalsymmetrische Funktion F nur von σ und θ abhängt und daß der Vektor $\vec{w}$ (vgl. Anhang I) sich in der Form

$$\vec{w} := \varepsilon q \nabla \sigma \times \nabla \theta = \frac{kq}{\sqrt{q_0}} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \ell} \right)_{\sigma, \theta} = \frac{kq(\sigma, \theta)}{\sqrt{q_0} D(\sigma, \theta)} \nabla \sigma \times \nabla \theta$$

ausdrücken läßt.

ANHANG III

BERECHNUNG DER IM STABILITÄTSKRITERIUM IV.5 AUFTRETENDEN GLEICHGEWICHTSGRÖSSEN

Wie in [8] gezeigt wird, kann zur Berechnung von $\langle A \rangle$ (s. IV.6) die Gleichung

$$\langle A \rangle = \mu_0 \left\langle \frac{\vec{J}^2}{|\vec{r}|^4} \right\rangle + \frac{k}{2\pi\chi} (\dot{I}\ddot{\psi} - \dot{J}\ddot{\chi}) \quad 1) \quad \text{AIII.1}$$

herangezogen werden. Dabei sind ψ bzw. J der Längsfluß bzw. der Längsstrom:

$$\psi := \int_0^{\Phi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{E} \cdot \vec{v} l}{D} d\Phi d\vartheta, \quad 2) \quad \text{AIII.2}$$

$$J := \int_0^{\Phi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{J} \cdot \vec{v} l}{D} d\Phi d\vartheta. \quad \text{AIII.3}$$

-
- 1) Die Punkte bedeuten Ableitungen nach dem Volumen.
 2) D ist die Funktionaldeterminante des im Anhang II eingeführten Koordinatensystems Φ, ϑ, l . -
 Bei der Berechnung aller Gleichgewichtsgrößen wird vorausgesetzt, daß die Bedingung III.10 (Verschwinden der Stromdichte auf der magnetischen Achse) gilt.

χ bzw. I stellen den Azimutalfluß bzw. -Strom dar:

$$\chi := \oint_{\vec{\theta} = \text{const.}} \vec{\theta} \cdot d\vec{S}_{\vec{\theta}} = \oint_{\vec{\theta} = \text{const.}} \frac{\vec{\theta} \cdot \nabla \Phi}{D} d\Phi d\ell = \int_0^{\Phi} \int_{\ell=0}^{2\pi/\sqrt{q_0}} \frac{\vec{\theta} \cdot \nabla \Phi}{D} d\Phi d\ell - \Psi, \quad \text{AIII.4}$$

$$I = \int_0^{\Phi} \int_{\ell=0}^{2\pi/\sqrt{q_0}} \frac{\vec{j} \cdot \nabla \Phi}{D} d\Phi d\ell - J. \quad \text{AIII.5}$$

Berücksichtigt man AII.12 - 16, so hat man:

$$|\nabla v|^2 = \left(\frac{dv}{d\Phi} \right)^2 |\nabla \Phi|^2 = \left(\frac{dv}{d\Phi} \right)^2 \bar{g}^{\Phi\Phi} =$$

$$= \left(\frac{dv}{d\Phi} \right)^2 \bar{D}^2 \{ \bar{g}_{\theta\theta} \bar{g}_{\ell\ell} - \bar{g}_{\theta\ell}^2 \},$$

AIII.6

$$|\nabla v|^2 = \left(\frac{dv}{d\Phi} \right)^2 4k^2 \sigma^2 \Gamma_0(\theta) \left[1 + \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma_0(\theta)} \sigma + o(\sigma^2) \right],$$

$$|\nabla v|^2 = \left(\frac{dv}{d\Phi} \right)^2 4k^2 \Phi \frac{\Gamma_0(\theta)}{a(\theta)} \left[1 + \frac{1}{v_{\ell}} \left\{ \frac{\Gamma_1(\theta)}{\Gamma_0(\theta)} + \frac{b(\theta)}{a(\theta)} \right\} \Phi^{1/2} + o(\Phi) \right],$$

- 1) Dabei ist $\tilde{\theta}$ definiert durch $\tilde{\theta} := \theta - \int_0^{\ell} \frac{d\ell^*}{T}$, wobei T der Torsionsradius der magnetischen Achse bedeutet. Nach Anhang 1 ist $T = (kq)^{-1/2}$ und demnach $\tilde{\theta} = \theta - q_0 \ell$. - Man kann leicht feststellen, daß das Koordinatensystem $\Phi, \tilde{\theta}, \ell$ dieselbe Funktionaldeterminante besitzt wie das System Φ, θ, ℓ . - Im Gegensatz zu den Flächen $\theta = \text{const.}$ werden sich die Flächen $\tilde{\theta} = \text{const.}$ um die magnetische Achse nicht.

wobei $a(\theta)$ bzw. $b(\theta)$ durch AII.13 bzw. 14 gegeben werden, und

$$\Gamma_0(\theta) := \lambda_1^2 \cos^2 \theta + \lambda_2^2 \sin^2 \theta, \quad \text{AIII.7}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\theta) := & 3\lambda_1\lambda_3 \cos^3 \theta + \lambda_4(\lambda_1 + 2\lambda_2) \cos \theta \sin^2 \theta + \\ & + \lambda_5(2\lambda_1 + \lambda_2) \cos^2 \theta \sin \theta + 3\lambda_2\lambda_6 \sin^3 \theta. \end{aligned} \quad \text{AIII.8}$$

Für die Abhängigkeit des Periodenvolumen von der Fluß-
funktion erhält man mit III.10

$$\nu(\Phi) := \int_0^{\Phi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\ell=0}^{2\pi/\sqrt{q_0}} \frac{d\Phi d\theta d\ell}{D} = \frac{2\pi^2}{k^2 q_0^{3/2}} \frac{(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon} \Phi + o(\Phi^2). \quad \text{AIII.9}$$

Mit Hilfe von AII.14 - 16 und AIII.6 - 9 kann nun die
Größe X berechnet werden :

$$\begin{aligned} X &:= \frac{k}{2\pi} \oint dS |\nabla v| = \frac{k}{2\pi} \left| \frac{dv}{d\Phi} \right| \int_0^{2\pi} \int_{\ell=0}^{2\pi/\sqrt{q_0}} \frac{|\nabla \Phi|^2}{D} d\theta d\ell, \\ X &= \left| \frac{dv}{d\Phi} \right| \left\{ \frac{2\pi}{\sqrt{q_0}} \frac{(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon} \Phi + o(\Phi^2) \right\}. \end{aligned} \quad \text{AIII.10}$$

Der Mittelwert von $\frac{\vec{j}^2}{|\nabla v|^4}$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\vec{j}^2}{|\nabla v|^4} \right\rangle &= \frac{k}{2\pi X} \oint dS |\nabla v| \frac{\vec{j}^2}{|\nabla v|^4} = \\ &= \frac{k}{2\pi X} \cdot \frac{1}{|dv/d\Phi|^3} \int_0^{2\pi} \int_{\ell=0}^{2\pi/\sqrt{q_0}} \frac{\vec{j}^2}{D |\nabla \Phi|^2} d\theta d\ell \end{aligned}$$

Berücksichtigt man AI.28, III.2-11, AII.12-16 und AIII.6-9,
so erhält man :

$$\langle \frac{f^2}{10v^{14}} \rangle = \frac{1}{\left(\frac{dv}{d\Phi}\right)^4} \cdot \frac{\kappa^2 f_0^2}{2k^2 \mu_0^2} \cdot \frac{1}{\Phi} \left[1 + \frac{\beta_0^2 (1+\epsilon^2)^2}{\epsilon^3 (1+\epsilon)} \{ 1 + ((3.7) \sin^2 \Omega) + o(\Phi) \} \right] . \quad \text{AIII.11}$$

Aus den Ausdrücken AI.27,28 für das Magnetfeld und die

Stromdichte ergibt sich unter Berücksichtigung von $\vec{w} = \frac{kq}{\sqrt{q_0}} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \ell} \right)_{\Phi, \theta}$
(vgl. Fußnote im Anhang II, Seite 65) :

$$\chi = \int_0^{\Phi} \int_{\ell=0}^{2\pi/\sqrt{q_0}} \frac{\vec{E} \cdot \nabla \Phi}{D} d\Phi d\ell - \psi = \frac{f_0}{\sqrt{q_0}} \int_0^{\Phi} \int_{\ell=0}^{2\pi/\sqrt{q_0}} q \vec{E}_{\ell\ell} d\Phi d\ell - \psi ,$$

$$\chi = \frac{2\pi}{\kappa^2} f_0 \Phi - \psi = \frac{2\pi}{\kappa} F - \psi \quad , \quad \text{AIII.12}$$

$$I = \int_0^{\Phi} \int_{\ell=0}^{2\pi/\sqrt{q_0}} \frac{\vec{I} \cdot \nabla \Phi}{D} d\Phi d\ell - J = - \frac{2\pi}{k\mu_0} \int_0^{\Phi} \frac{df}{d\Phi} d\Phi - J ,$$

$$I = - \frac{2\pi}{k\mu_0} (f-f_0) - J . \quad \text{AIII.13}$$

-
- 1) F ist also der Gesamtfluß pro z -Einheit durch eine helikale Fläche $\theta = \text{const.}$ zwischen der magnetischen Achse und der Plasmaoberfläche.

Für die hier betrachteten helikalsymmetrischen Gleichgewichte der idealen Magnetohydrodynamik gelten die Gleichungen AIII.12-13 exakt.

Für den Längsfluß bzw. -Strom ergibt sich :

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{q_0 f_0 k}{2\pi} v - \frac{k^4 q_0^{5/2} f_0 (1+\varepsilon^2)}{16 \pi^3 \varepsilon} \left[1 - \right. \\ & - \frac{4 q_0 \varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2} + \frac{3 \rho_0 (1-\varepsilon^2)}{q_0 \varepsilon^2} (\lambda_3 \cos \Omega + \varepsilon^2 \lambda_6 \sin \Omega) + \\ & \left. + \frac{2 \alpha \varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2} + \alpha \rho_0^2 \right] v^2 + o(v^3) , \end{aligned} \quad \text{AIII.14}$$

$$\begin{aligned} J = & \frac{k^5 q_0^{5/2} f_0 \alpha}{\mu_0 64 \pi^3} \left[\frac{16 q_0 \varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} + q_0 \rho_0^2 - (3+q_0)(1+\varepsilon^2) - \right. \\ & - 3 \alpha \rho_0^2 (1+\varepsilon^2) - \frac{8 \varepsilon^2}{\alpha (1+\varepsilon^2)} \left(\frac{\eta}{q_0} + \varphi_1 + \alpha^2 \right) - \\ & - \frac{9 \rho_0}{q_0} (1-\varepsilon^4) (\lambda_3 \cos \Omega + \varepsilon^2 \lambda_6 \sin \Omega) + \\ & \left. + q_0 \rho_0^2 (\varepsilon^2 - 1) \sin^2 \Omega \right] v^2 + o(v^3) , \end{aligned} \quad \text{AIII.15}$$

mit $\eta := \frac{\mu_0}{k^2} \left(\frac{d^2 p}{d F^2} \right)_0$, $\varphi_1 := \frac{f_0}{k^2} \left(\frac{d^2 F}{d F^2} \right)_0$.

Aus AIII.1, 9-15 erhält man den Mittelwert von A :

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle = & - \frac{k^{10} q_0^6 f_0^2}{64 \mu_0 \pi^8} \cdot \frac{\alpha \varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2} \left[\frac{1 - 4 \frac{q_0 \varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2}}{1} + \right. \\
 & + \frac{3 q_0}{q_0} \frac{(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} (\lambda_3 \cos \Omega + \varepsilon^2 \lambda_6 \sin \Omega) - \\
 & \left. - \alpha q_0^2 \frac{(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \left\{ (\varepsilon+2) - 2(\varepsilon^2+\varepsilon+1) \sin^2 \Omega \right\} \right] \frac{1}{\Phi} + O(0)
 \end{aligned}
 \tag{AIII.16}$$

Bis zur hier interessierenden Ordnung stellt die Bedingung

$$\langle A \rangle \leq 0
 \tag{AIII.17}$$

für helikalsymmetrische MHD Gleichgewichte mit verschwindender Stromdichte auf der magnetischen Achse das notwendige Merciersche Stabilitätskriterium dar. Dies kann man leicht sehen, wenn man bei der Abschätzung der in [7], Gl.53 auftretenden Größen die Beziehung III.10 berücksichtigt.

Für die Auswertung des hinreichenden Lortzschen Kriteriums IV.5 ist es notwendig, den Mittelwert von A^2 zu bestimmen. Dies erfordert wiederum die explizite Ausrechnung der Größe A. Aus der Definitionsgleichung IV.4 ergibt sich:

$$A = \frac{k^{10} q_0^6 \sqrt{q_0} \beta_0 \propto f_0^2}{2^8 \pi^8 \mu_0} \frac{(1+\epsilon^2)^{3/2}}{\epsilon^4} \frac{(\epsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{3/2}}{(\epsilon^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2}.$$

$$\cdot \left[\epsilon^2 \sin \Omega \sin \theta - \cos \Omega \cos \theta + 2 \epsilon^2 \frac{(\epsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{(\epsilon^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \cdot \cos(\Omega + \theta) \right] \frac{1}{\Phi^{3/2}} +$$

AIII.18

$$+ O\left(\frac{1}{\Phi}\right).$$

Durch Integration über eine magnetische Fläche erhält man dann

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{2\pi X} \oint dS \, |\mathbf{v}| A^2 =$$

$$= \left[\frac{k^{10} q_0^6 \sqrt{q_0} \beta_0 \propto f_0^2}{2^8 \pi^9 \mu_0} \right]^2 \frac{\epsilon}{(1+\epsilon^2)^5}.$$

AIII.19

$$\cdot \left[(5\epsilon^4 - 4\epsilon^2 + 7) \cos^2 \Omega + \epsilon^4 (7\epsilon^4 - 4\epsilon^2 + 5) \sin^2 \Omega \right] \cdot \frac{1}{\Phi^3} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\Phi^2}\right)$$

ANHANG IV

DAS STABILITÄTSKRITERIUM IV.5

In [8], [18] wird als hinreichendes Stabilitätskriterium für MHD Gleichgewichte, für die die Stromdichte auf der magnetischen Achse verschwindet und die periodisch entlang der Magnetfeldlinien sind, die Bedingung

$$\tilde{X}^2 \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2} \leq \gamma^* (\tilde{X}^2 \langle A \rangle) \quad \text{AIV.1}$$

abgeleitet, wobei

$$\tilde{X} := \sqrt{\mu_0} \left| \frac{dV}{dF} \right| X, \quad (\text{vgl. Anhang III, Gl. AIII.10}), \quad \text{AIV.2}$$

$$\gamma^{*2} = \frac{(4K)^2}{3} \left[(4\tilde{k}K)^2 - (1+\tilde{k}^2) \tilde{X}^2 \langle A \rangle \right] - \tilde{X}^4 \langle A \rangle^2 \quad \text{AIV.3}$$

und $\tilde{k}$ aus der Gleichung

$$-\tilde{X}^2 \langle A \rangle = 16K(K-E), \quad \text{AIV.4}$$

mit

$$K(\tilde{k}) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\tilde{k}^2 \pi}{8} + o(\tilde{k}^4), \quad \text{AIV.5}$$

$$E(\tilde{k}) = \int_0^{\pi/2} (1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\tilde{k}^2 \pi}{8} + o(\tilde{k}^4), \quad \text{AIV.6}$$

zu bestimmen ist.

Wie aus den Ergebnissen von Anhang III folgt, ist

$$A = o(\phi^{-3/2}) = o(\sigma^{-3}),$$

$$\tilde{X} = o(\tilde{\Phi}) = o(\sigma^2), \quad \text{AIV.7}$$

$$\langle A \rangle = o(\phi^1) = o(\sigma^{-2}).$$

Damit ergibt sich aus AIV.4-6

$$\tilde{k}^2 = - \underbrace{\frac{\tilde{X}^2 \langle A \rangle}{2\pi^2}}_{o(\sigma^4)} + o(\sigma^4). \quad \text{AIV.8}$$

ψ^{*1} erhält man dann aus AIV.3:

$$\psi^{*1} = - \underbrace{4\pi^2 \tilde{X}^2 \langle A \rangle}_{o(\sigma^4)} + o(\sigma^4). \quad \text{AIV.9}$$

Wegen AIV.7 kann auf der linken Seite von AIV.1 $\langle A \rangle$
 gegen A vernachlässigt werden; mit AIV.9 erhält man
 dann das Kriterium

$$\langle A \rangle \leq - \frac{\tilde{X}^t}{4 \eta^1} \langle A^1 \rangle .$$

AIV.10

VERZEICHNIS DER VERWENDETEN GRÖSSEN

Es wird nicht in allen Fällen eine exakte Definition der verwendeten Größen gegeben.

Zuerst werden die lateinischen, anschließend die griechischen Symbole aufgeführt.

$\vec{A}$: magnetisches Vektorpotential.

A_s, A_u, A_z : kovariante Komponenten des magnetischen Vektorpotentials in einem helikalen Koordinatensystem s, u, z .

A : bei der Untersuchung der Stabilität von Gleichgewichten der idealen Magnetohydrodynamik auftretende Größe. A wird durch die Gleichung IV.4 definiert.

$\langle A \rangle$ bzw. $\langle A^2 \rangle$: Mittelwerte von A bzw. A^2 über eine magnetische Fläche (vgl. Gl. IV.6).

$A_n, n=1,2,3\dots$: Integrationskonstanten.

$q(\vartheta)$: Funktion des Winkels ϑ (s.u.), definiert durch die Gleichung AII.13.

$\vec{B}$: magnetische Induktionsflußdichte.

B : Betrag von $\vec{B}$.

B_0 : B auf der magnetischen Achse.

B^z bzw. B_z : kontra- bzw. kovariante z -Komponente von $\vec{B}$ in einem helikalen Koordinatensystem s, u, z .

B_n , $n=1,2,3,\dots$: Integrationskonstanten.

$\vec{b}$: Binormale der magnetischen Achse.

$b(\theta)$: Funktion des Winkels θ (s.u.), definiert durch
die Gleichung AII.14.

C_n , $n=1,2,3,\dots$: Integrationskonstanten.

D bzw. $\overline{D}$: Funktionaldeterminante des Koordinatensystems
 σ, θ, ϱ bzw. Φ, θ, ϱ (s.u., vgl. auch Anhang II,
Gleichungen AII.11 und AII.14).

D_n , $n=1, 2, 3,\dots$: Integrationskonstanten.

$\vec{E}$: elektrische Feldstärke.

E : elliptisches Integral zweiter Gattung.

F : Flußfunktion. Die Größe F stellt den magnetischen Fluß
pro z -Einheit durch eine bandförmige helikale Fläche dar,
deren einer Rand die magnetische Achse, deren anderer eine
beliebige Schraubenlinie der durch F charakterisierten
magnetischen Fläche ist.

f : Stromfunktion. Die Größe $(f_0 - f) \frac{1}{\mu_0}$ stellt den elektrischen
Strom pro z -Einheit durch eine bandförmige helikale Fläche
dar, deren einer Rand die magnetische Achse, deren anderer
eine beliebige Schraubenlinie der betreffenden magnetischen
Fläche ist. Dabei ist f_0 der Wert von f auf der magnetischen
Achse.

f_0 : f auf der magnetischen Achse.

f_1 : Ableitung von f nach der Flußfunktion F , gebildet
auf der magnetischen Achse.

g : Zylindersymmetrische Funktion; Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen II.10 und II.19. g stellt also zwei verschiedene Funktionen dar, je nach dem, ob es sich auf die Gleichung II.10 oder auf II.19 bezieht.

$g^{\sigma\sigma}, g^{\theta\theta}$ usw. bzw. $\bar{g}_{\theta\theta}, \bar{g}_{\theta\theta}$ usw.:

Komponenten des metrischen Tensors des Koordinatensystems σ, θ, φ bzw. Φ, θ, φ , gegeben durch die Gleichungen AII.11 bzw. AII.15.

h : Zylindersymmetrische Funktion, welche die Differentialgleichung II.9 oder II.18 erfüllt. h stellt verschiedene Funktionen dar, je nach dem, auf welche Gleichung es sich bezieht.

$h^i, i=1,2$: linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung II.9 oder II.18

$h_n, n=1,2,3,\dots$: zum Index n gehörende Lösung der Differentialgleichung II.9 oder II.18.

I : Azimutalstrom pro Periode.

J : Längstrom pro Periode.

$J_n, n=0,1,2,\dots$: Besselsche Funktion n -ter Ordnung und erster Art.

$\vec{j}$: elektrische Stromdichte.

j_0 : Betrag von $\vec{j}$ auf der magnetischen Achse.

K : elliptisches Integral erster Gattung.

k : die Größe $2\pi/k$ stellt die z -Periode der Plasmasäule dar.

- $\tilde{K}$: bei den elliptischen Integralen E und K auftretender Parameter.
- $\mathcal{L}$: elliptischer Differentialoperator, definiert durch die Gleichung I.15.
- L : Periodenlänge der Plasmasäule, gerechnet längs der magnetischen Achse.
- L_z : z-Periode der Plasmasäule. Es gilt : $L_z = \sqrt{q_0} L$.
- l^* : Bogenlänge auf der magnetischen Achse.
- l : " " " " " in Einheiten von $1/k$.
- l_0 : l für einen willkürlich gewählten, festen Punkt der magnetischen Achse.
- $N_n, n=0,1,2,\dots$: Besselsche Funktion n-ter Ordnung und zweiter Art.
- $\vec{n}$: Hauptnormale der magnetischen Achse.
- p : Plasmadruck.
- p_0 : p auf der magnetischen Achse.
- p_1 bzw. p_2 : erste bzw. zweite Ableitung von p nach der Flußfunktion F , gebildet auf der magnetischen Achse.
- q : $q := (1 + k^2 s^2)^{-1}$.
- q_0 : q auf der magnetischen Achse.
- R : Krümmungsradius einer beliebigen Schraubenlinie.
- R_R : für den Rand des Plasmas charakteristischer Radius (vgl.S.41).
- $\vec{r}$: Ortsvektor.
- s : Zylinderkoordinate (Radius).
- s_0 : s auf der magnetischen Achse.

T : Torsionsradius einer beliebigen Schraubenlinie.

$\vec{t}$: Tangenteneinheitsvektor der magnetischen Achse.

t : Zeit.

$U(u)$: periodische Funktion der helikalen Koordinate u , mit Periode 2π .

U : Energieintegral. Summe der potentiellen und kinetischen Energie des Plasmas pro Periode.

u : helikale Koordinate. $u := \varphi + kz$ (s, φ, z : Zylinderkoordinaten).

u_0 : u auf der magnetischen Achse. u_0 kann o.B.d.A. gleich Null gesetzt werden, eine Festlegung, die für diese Arbeit gilt.

$\vec{V}(\vec{r}, t)$: hydrodynamisches Geschwindigkeitsfeld im Plasma.

v : von den magnetischen Flächen eingeschlossenes Volumen pro Periode.

W : potentielle Energie des Plasmas pro Periode.

$\vec{w}$: divergenzfreies Vektorfeld. Die Vektoren $\vec{w}$ sind in jedem Raumpunkt P tangential zu der durch P gehenden Schraubenlinie.

X : Gleichgewichtsgröße, definiert durch die Gleichung IV.7.

y_n^i , $n = 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, 2$: zum Index n gehörende linear unabhängige Lösungen der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung II.24.

z : übliche z -Koordinate.

α : erste Ableitung des Plasmadruckes nach der Flußfunktion, gebildet auf der magnetischen Achse, in Einheiten von $k \sqrt{q_0} B_0 / \mu_0$.

$\Gamma_0(\vartheta), \Gamma_1(\vartheta)$: Funktionen des Winkels ϑ (s.u.), definiert durch die Gleichungen AIII.7,8.

γ : erste Ableitung der Stromfunktion nach der Flußfunktion, gebildet auf der magnetischen Achse, in Einheiten von k .

γ^* : Gleichgewichtsgröße, definiert durch die Gleichung AIV.3.

$\bar{\gamma}$: Verhältnis der spezifischen Wärmen des Plasmas.

ε : in zweiter Ordnung in σ (s.u.) sind die Querschnitte der magnetischen Flächen mit einer senkrecht zur magnetischen Achse stehenden Ebene Ellipsen. ε stellt deren Achsenverhältnis dar. Dabei steht im Nenner die Länge der Ellipsenachse, die die Richtung Ω (s.u.) definiert.

η : zweite Ableitung des Plasmadruckes p nach der Flußfunktion F , gebildet auf der magnetischen Achse, in Einheiten von $k^2 / 2 \mu_0$.

ϑ : Winkelkoordinate auf einer senkrecht zur magnetischen Achse stehenden Ebene. ϑ ist so definiert, daß für die Hauptnormale der magnetischen Achse $\vartheta = -\Omega$, für die Binormale $= \frac{\pi}{2} - \Omega$ gilt (Ω : s.u.).

$\tilde{\vartheta}$: $\tilde{\vartheta} := \vartheta - q_0 \mathcal{L}$.

$\Lambda, \Lambda_i, \lambda_i, i=1, \dots, 6$: bei der Entwicklung der Fluß-

funktion nach σ (s.u.) auftretende Parameter.

μ_0 : Permeabilität des Vakuums.

ν : Massendichte des Plasmas.

$\vec{\xi}$: Verschiebungsfeld, das die Störung des Plasmas von der Gleichgewichtslage beschreibt.

ϱ : Verhältnis von Torsions- zu Krümmungsradius einer beliebigen Schraubenlinie.

ϱ_0 : ϱ auf der magnetischen Achse.

σ^* : auf der von Haupt- und Binormale der magnetischen Achse aufgespannten Ebene gerechneter Abstand von der magnetischen Achse.

σ : σ^* in Einheiten von $1/k$.

Φ : F in Einheiten von f_0/k .

φ : Winkel in einem Zylinderkoordinatensystem.

χ : magnetischer Azimutalfluß pro Periode.

ψ : " " Längsfluß " " "

Ω : seien $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ das begleitende Dreibein der magnetischen Achse (Tangente, Hauptnormale, Binormale). In zweiter Ordnung in σ sind die Querschnitte der magnetischen Flächen mit den von $\vec{n}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebenen entweder Kreise oder Ellipsen. Für kreisförmige Querschnitte ist $\Omega = 0$. Sind die Querschnitte Ellipsen, dann bilden die beiden Halbachsen einer solchen Ellipse die Winkel Ω_1 und Ω_2 mit der Richtung $\vec{n}$ (von $\vec{n}$ in Richtung $\vec{b}$ gezählt). Ω wird als der kleinere der beiden Winkeln definiert.

ω : Winkel in einem auf den senkrecht zur magnetischen Achse stehenden Ebenen definierten Polarkoordinatensystem. ω ist so definiert, daß für die Hauptnormale der magnetischen Achse $\omega = 0$, für die Binormale $\omega = \frac{\pi}{2}$ gilt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Shkarofsky, I.P. , Johnston, T.W. , Bachynsky, M. P. ,
The Particle Kinetics of Plasmas, Kapitel 9 ,
Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
- [2] Spitzer, Jr. , L., Physics of fully Ionized Gases, 1956
Interscience Publishers Inc., New York.
- [3] Schmidt, G.,
Physics of High Temperature Plasmas, Academic Press, Inc., New York.
- [4] Chew, G.F., Goldberger, M.L., and Low, F.E. ,
Proc. Roy. Soc. A 236 , 112 (1956).
- [5] Kruskal, M.d., Kulsrud, R.M.
Phys. Fluids 1 ,(1958), 265.
- [6] Spitzer, Jr., L,
Phys. Fluids 1 ,(1958), 253.
- [7] Mercier, C., Nucl. Fusion Suppl. Pt.2 , (1962), 801.
- [8] Lortz, D., Rebhan, E., Spies, G.,
Nucl. Fusion 11 , (1971), 583.
- [9] Gerlich, G., Z. f. Naturforschung, 27a , (1972), 1167
- [10] Kadomtsev, B.B.,
Soviet Phys. JETP 37 (10), (1960), 962.
- [11] Morozov, A.I., and Solov'ev, L.S.,
Reviews of Plasma Physics, Vol. 2.
- [12] Kamke, E.,
Differentialgleichungen, 7 -te Auflage, Akad. Verlagsges.
Geest und Portig, Leipzig, I , (1961), 427 .

- [13] Johnson, J.L., Oberman, C.R., Kulsrud, R.M. and Frieman, E.A.,
Phys. Fluids 1 , (1958) , 281 .
- [14] Greene, J.M., Johnson, J.L., Kruskal, M.D. and Wilets, L.,
Phys. Fluids 5 , (1962) , 1063.
- [15] Mercier, C., Nucl. Fusion, 3 , (1963) , 89.
- [16] Mercier, C., Nucl. Fusion, 4 , (1964) , 213.
- [17] Bernstein, I.B., Frieman, E.A., Kruskal, M.D., Kulsrud, R.M.,
Proc. Roy. Soc. A 244 , (1958), 17.
- [18] Lortz, D., Rebhan, E.,
Methoden und Verfahren der Math. Physik, herausgegeben
von B. Bosowski und E. Martensen, 2 , (1973), 129,
B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich.
- [19] Greene, J.M., Johnson, J.L.,
Phys. Fluids 5 , (1962), 510.
- [20] Shafranov, V.D., Plasma Physics 13 , (1971), I, 349.
- [21] Rebhan, E., Jahresbericht 1971 ,
Max Planck Institut für Plasmaphysik, Garching.
- [22] Nührenberg, J.,
Dissertation, Universität München, (1962).
- [23] Shafranov, V.D.,
Nucl. Fusion, 8 , (1968), 253.
- [24] Hain, K., Lüst, R. und Schlüter, A.,
Z. Naturforschung 12a, (1957), 833.
- [25] Laval, G., Mercier, C. and Pellat, R.
Nucl. Fusion 5 , (1965), 156.
- [26] Slater, L.J., Lit, D.
Confluent Hypergeometric Functions
University Press, Cambridge, (1960).
- [27] Martensen, E., Potentialtheorie, B.G. Teubner, Stuttgart, (1968).

Lebenslauf

Am 8.9.1945 wurde ich, Darío Correa Restrepo als Sohn des Arztes Daniel Correa Velázquez und seiner Ehefrau Libia Restrepo de Correa, in Medellín (Kolumbien), geboren. Die Volksschule und die höhere Schule besuchte ich in Medellín bis zur Abschlußprüfung im Jahre 1962. Anschließend studierte ich zwei Semester an der elektrotechnischen Fakultät der Pontificia Universidad Javeriana in Bogotá.

Anfang 1964 kam ich in die Bundesrepublik.

Nach einem Sprachkurs in Murnau/Obb. und sechsmonatiger praktischer Tätigkeit bei der Firma Siemens Reiniger Werke AG in Erlangen, begann ich im Oktober 1964 das Studium der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Im Sommer 1965 wechselte ich zur physikalischen Fakultät über. Die Diplom-Hauptprüfung schloß ich im November 1970 ab. Seitdem bin ich als Stipendiat im Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching tätig.

